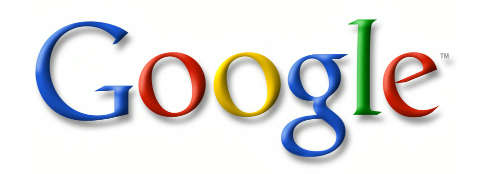
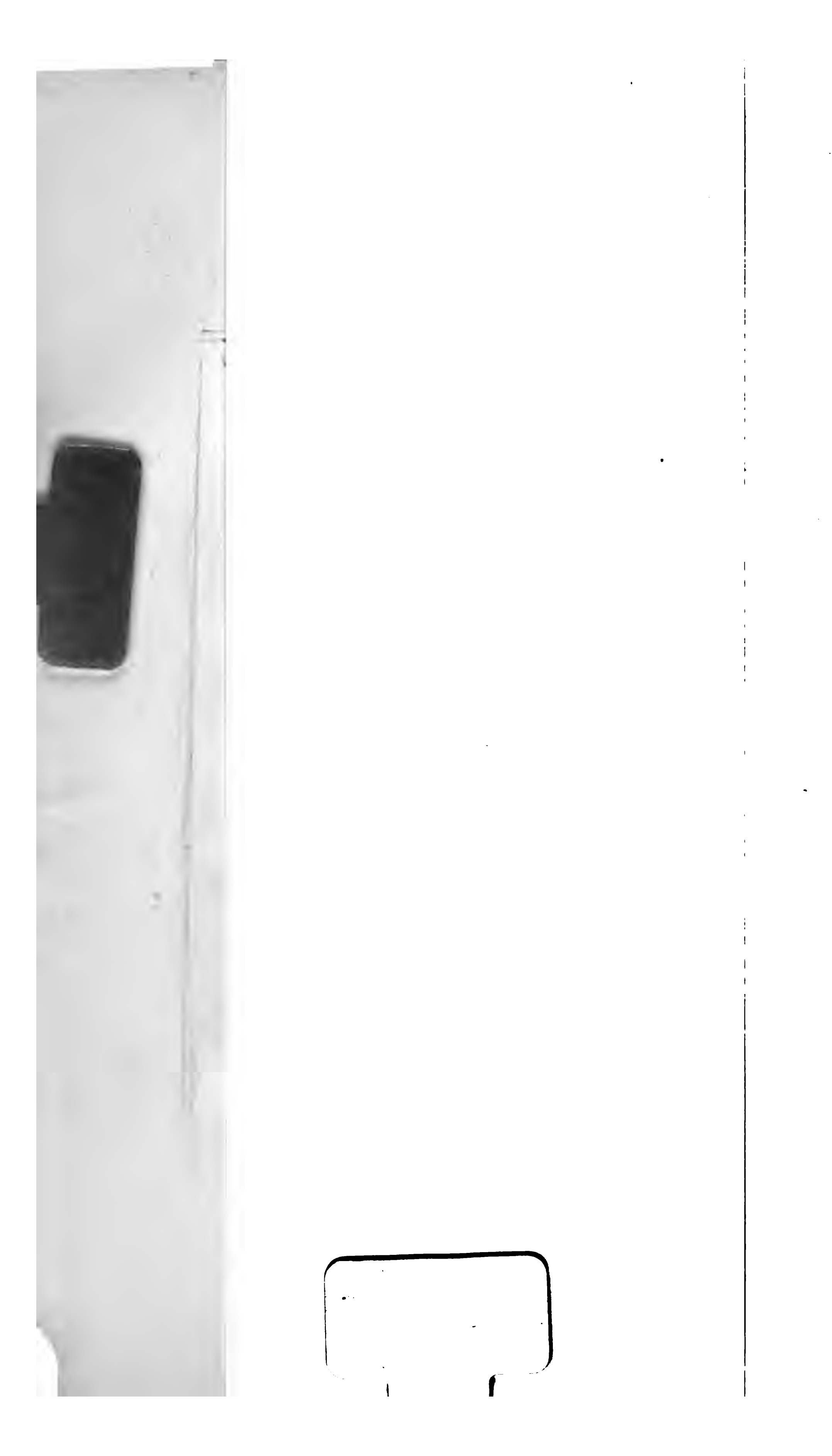






NEUE CONSTRUCTIONEN

AUS DER

GRAPHISCHEN STATIK

VON

Henry Turner

DR. H. T. EDDY,

PROFESSOR DER REINEN UND ANGEWANDTEN MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT ZU CINCINNATI.

MIT ZEHN FIGUREN IM TEXT UND SECHS TAFELN.

VOM VERFASSER VERMEHRTE UND VERBESSERTE DEUTSCHE AUSGABE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1880.

Vorrede.

Bei Gelegenheit der im August 1876 zu Buffalo abgehaltenen Versammlung der American Association for the Advancement of Science hielt der Verfasser dieser Schrift zwei Vorträge: einen über „A New Fundamental Method in Graphical Statics“ und einen über „Certain New Constructions in Graphical Statics“. Die letztere Arbeit liegt dem vorliegenden Werkchen zu Grunde.

Die meisten der darin behandelten Aufgaben sind, wie der Verfasser vermuthet, noch nie durch graphische Methoden gelöst worden, obgleich in gewissen Fällen theilweise Lösungen gelungen sind. Die Möglichkeit einer directen und vollkommenen Lösung der Probleme der verschiedenen Formen des elastischen Bogens beruht, wie sich zeigt, auf einem bis jetzt noch nicht bekannten Satze über die Construction eines Seilpolygons zu den wirkenden Kräften, welches so nahe als möglich mit der Curve des Bogens zusammenfällt, die selbst als theilweises Seilpolygon zu betrachten ist. Der Unterschied in der Lage dieser zwei Curven ist das Maass des Biegungsmoments im Bogen. Die Berechnung des Bogens ist fernerhin durch den Nachweis vereinfacht, dass sie von der eines geraden Trägers von demselben Querschnitte abhängt.

Wer mit den verwickelten Formeln bekannt ist, die zur analytischen Lösung dieses Problems angewandt werden, weiss, dass durch diese Verwickelungen die wirklichen Beziehungen so verdeckt werden, dass aus ihnen ein klares Verständniss der Art und Weise, wie die Spannungen und Pressungen von der Belastung abhängen, schwierig, wenn nicht unmöglich ist. Dagegen ist zu hoffen, dass die graphische Untersuchung, die sozusagen ein Bild dieser Grössen und ihrer Beziehungen liefert, keine derartigen Schwierigkeiten darbieten wird. Ferner glaubt der Verfasser, dass die in Folge des Temperaturwechsels oder irgend einer die Spannweite des Bogens verändernden Ursache auftretenden inneren Kräfte hier zum ersten Male durch das graphische Verfahren dargelegt worden sind.

Es wird weiter ein neuer Satz aufgestellt, der die Basis zu einer directen Lösung des Problems des biegsamen Bogens und des Hängebrückenkabels sammt dessen Versteifungsfachwerk liefert.

Diese Untersuchungen und Constructionen haben zu einer neuen Behandlung des continuirlichen Trägers im allgemeinsten Falle eines veränderlichen Trägheitsmoments geführt. Sie ergibt eine vollständige graphische Lösung des Problems; ihr ist eine analytische Untersuchung beigegeben, in welcher die allgemeinen Formeln von dem Satze von drei Momenten zum ersten Male in einfacher Form erscheinen.

Ein weiteres hier behandeltes Problem ist das des Bogens mit Fugen, wie sie in steinernen oder backsteinernen Bögen vorkommen: ein Fall der zwischen dem des biegsamen und des elastischen Bogens liegt. Es sind hierbei neue Betrachtungsweisen angewandt, um die Lage und den Horizontalschub desjenigen Seilpolygons festzustellen, welches die Drucklinie ist.

Es erwies sich als möglich, durch Constructionen, welche den bei der Untersuchung des Bogens angewandten ganz ähnlich sind, eine vollständige Lösung der Probleme der Kuppel zu erhalten; und insbesondere wird wohl hier zum ersten Male die Kuppel aus Mauerwerk richtig untersucht und ihr Unterschied von der Metallkuppel angegeben worden sein.

Die graphische Construction für die Stabilität von Futtermauern wird, soviel der Verfasser weiss, hier zum ersten Male so dargelegt, dass der wahre Schub in seiner wirklichen Richtung zur Anwendung kommt, wie derselbe in Rankine's Untersuchung über den Schub homogener fester Körper nachgewiesen ist. Sie ist in der That eine Anpassung des sehr nützlichen sogenannten Coulomb'schen Keils des Maximaldruckes an die Ergebnisse der Untersuchung Rankine's.

Der Verfasser wünscht an dieser Stelle Herrn Dr. J. Lüroth, Professor der Mathematik an der grossh. bad. Polytechnischen Schule zu Karlsruhe, für den wesentlichen Beistand in der Vorbereitung der folgenden Seiten für den Druck und die Durchsicht der Correcturbogen seinen tief empfundenen Dank auszusprechen. Ferner fühlt er sich gedrungen, der ausgezeichneten Arbeiten Culmann's, Mohr's, Bauschinger's und anderer Begründer der graphischen Rechnungsmethoden anerkennungsvoll Erwähnung zu thun.

Berlin, den 27. Januar 1880. **H. T. Eddy.**

Inhalt.

Erstes Kapitel.

Zweck dieses Werkes ist die vollständige Erörterung der Stabilität verschiedener Formen des elastischen oder steifen Bogens mittelst des Seilpolygons, des gegenwärtig so allgemein benützten Hilfsmittels für graphische Untersuchungen. Eine oder zwei andere Constructionen, welche Beachtung verdienen, sind an geeigneter Stelle eingefügt worden. Vorausgesetzt wird dabei die Kenntniss der Eigenschaften des Seilpolygons und des zugehörigen Kräftepolygons für parallele Kräfte.

Das Seilpolygon, wie es gewöhnlich bei der Untersuchung des einfachen oder des continuirlichen Trägers angewandt wird, hat eine durchaus künstliche Beziehung zur vorliegenden Aufgabe und die dabei angenommene Horizontalkraft ist ganz unwesentlich; nicht so verhält es sich in Bezug auf den Bogen. Wie es sich ergeben wird, gibt es zu einem gegebenen Bogen sammt Belastung ein specielles Seilpolygon, in welchem die Horizontalkraft der wirkliche Horizontalschub des Bogens ist. Ist in einem gegebenen Falle dieser Schub gefunden, so ermöglicht er eine sofortige Beantwortung aller andern auf die Spannungen bezüglichen Fragen.

Dieser Schub muss bei Bögen verschiedener Art verschieden bestimmt werden, indem sich das Verfahren nach der Zahl, der Art und der Lage der Gelenke im Bogen richtet.

Die Methoden, deren wir uns bedienen werden, beruhen darauf, dass wir im Stande sind, die von der Belastung ausgeübten Kräfte in zwei Theile zu zerlegen, deren einer vom Bogen aufgenommen wird, indem dieser als Seilcurve wirkt, während der zweite Theil zu seiner Vernichtung den Bogen als Träger in Anspruch nimmt. Diese beiden Arten wie die Last getragen wird, müssen gesondert betrachtet werden. Zu diesem Zwecke erscheint es nothwendig, die wohlbekannten Gleichungen zu wiederholen und in gewissen Beziehungen zu besprechen, die auf elastische Träger anwendbar sind, auf welche senkrechte Drucke einwirken, die von der Belastung und dem Widerstande der Unterstützung herrühren.

Es stelle P irgend eine der verschiedenen Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$, vor,

die auf den Träger einwirken. Man betrachte einen Querschnitt des Trägers in irgend einem Punkte O.

Es sei $x =$ der horizontalen Entfernung von O bis zur Kraft P,
$R =$ dem Krümmungsradius des Trägers bei O.

Bei dem Querschnitte O sind dann die erwähnten Gleichungen

$$\text{Scheerkraft } S = \Sigma(P),$$

$$\text{Biegungsmoment } M = \Sigma(Px),$$

$$\text{Krümmung } P' = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI},$$

$$\text{totale Biegung } B = \Sigma(P') = \Sigma\left(\frac{M}{EI}\right),$$

$$\text{Einsenkung } D = \Sigma(P'x) = \Sigma\left(\frac{Mx}{EI}\right),$$

wobei E den Elasticitätsmodul des Materials, I das Trägheitsmoment des Querschnitts bezeichnet, und, wie bekannt, die Summation von dem Puncte O bis an ein freies Ende des Trägers sich erstrecken muss; wenn sie sich nicht bis zu einem freien Ende erstreckt, so drückt die Summation nur die Wirkung der in der Summation eingeschlossenen Kräfte aus.

Man nehme nun eine Anzahl Punkte in gleichem Abstande auf der Axe des Trägers an und berechne die Werthe von P, S, M, B, D für diese Punkte, indem man in diesen Punkten der Reihe nach O annimmt, und errichte an denselben Ordinaten, deren Längen den berechneten Grössen proportional sind. Nimmt man zuerst an, dass I an allen Punkten sich gleich bleibe, so können die Werthe dieser Ordinaten, wenn a, b, c etc. irgend welche constante Zahlen sind, wie folgt ausgedrückt werden:

$$y_p = a \cdot P \tag{1}$$

$$y_s = b \cdot \Sigma(P) \tag{2}$$

$$y_m = c \cdot \Sigma(Px) = c \cdot M \tag{3}$$

$$y_b = d \cdot \Sigma(M) \tag{4}$$

$$y_d = e \cdot \Sigma(Mx). \tag{5}$$

Wenn I für verschiedene Querschnitte nicht gleich ist, so sei $P' = \frac{M}{I}$; dann sind die letzten drei Gleichungen durch die folgenden zu ersetzen:

$$y'_m = f \cdot P' \tag{3'}$$

$$y'_p = g \cdot \Sigma(P') \tag{4'}$$

$$y'_d = h \cdot \Sigma(P'x). \tag{5'}$$

Die Ordinaten y_m und y'_m sind nicht gleich, lassen sich aber aus einander herleiten, wenn wir das Verhältniss der Trägheitsmomente der verschiedenen Querschnitte kennen.

Gleichung (1) drückt die Belastung aus und y_p mag als die Höhe irgend eines gleichförmigen Materials, wie Erde, Schotter oder Mauerwerk betrachtet werden. Linien, welche die Endpunkte dieser Ordinaten verbinden, werden ein Vieleck oder annähernd eine Curve bilden, welche die Oberfläche der Belastung bezeichnet. Ist die Belastung gleichförmig, so ist diese Fläche eine horizontale.

Zum Zwecke unserer Untersuchung nehmen wir an, dass eine vertheilte Last, deren Oberfläche das Vieleck oder die Curve ist, die wir eben beschrieben, dieselbe Wirkung hervorbringt, wie eine Reihe concentrirter, den Ordinaten y_p proportionaler Lasten, die an den angenommenen Theilungspunkten wirken. Wenn die angenommenen Theilungspunkte nahe genug bei einander sind, so ist die Annahme hinlänglich genau.

Wird in ähnlicher Weise ein Vieleck hergestellt durch Verbindung der Endpunkte der aus Gleichung (3) berechneten Ordinaten y_m, so ist dieses bekanntlich ein Seilpolygon für die angewandten Lasten P, und es kann danach auch direct, ohne Berechnung, mit Hilfe eines Kräftepolygons und irgend einer angenommenen Horizontalkraft construirt werden.

Man sieht nun, dass die Gleichungen (3) und (5) oder (3') und (5') dieselbe Verwandtschaft zu einander haben, wie die Gleichungen (1) und (3). Die Beziehung lässt sich so ausdrücken: Wenn die Ordinaten y_m (oder y'_m) als die Höhe irgend einer Art von Belastung betrachtet werden, so dass der vieleckige Theil des Seilpolygons die Oberfläche dieser Last ist, so wird ein zweites, für diese Belastung construirtes, Seilpolygon Ordinaten haben, die zu y_d proportional sind. Diese sind selbst aber proportional zu den wirklichen Einsenkungen des Trägers.

Daher könnte man ein so construirtes zweites Seilpolygon das Einsenkungspolygon nennen, da es in vergrössertem Maasstabe die Gestalt der neutralen Achse des sich einsenkenden Trägers zeigt. Das erste Seilpolygon mit den Ordinaten y_m liesse sich das Momentenpolygon nennen.

Es mag von Nutzen sein, die physikalische Bedeutung der Gleichungen (3), (4), (5) oder (3'), (4'), (5') zu betrachten. Gemäss der allgemein geltenden Theorie steht die Grösse der Krümmung eines gleichförmigen Trägers in geradem Verhältnisse zum Moment der wirkenden Kräfte, und für verschiedene Träger oder verschiedene Theile

desselben Trägers, in umgekehrtem Verhältnisse zum Widerstande, den der Träger leisten kann. Nun variirt dieser Widerstand direct wie I variirt; daher ist die Krümmung mit $\frac{M}{I}$ proportional, was Gleichung (3) oder (3′) besagt.

Die Krümmung an einem Punkte wird aber durch den spitzen Winkel ausgedrückt, den zwei Tangenten bilden, deren Berührungspunkte um eine Einheit von einander entfernt sind, und die totale Biegung, d. h. der Winkel zwischen der Tangente bei O und der bei einem entfernten Punkte A, ist die Summe aller solcher Winkel zwischen O und dem Punkte A. Daher ist die totale Biegung proportional zu $\sum\left(\frac{M}{I}\right)$, indem die Summation sich von O zum Punkte A erstreckt, was Gleichung (4) oder (4′) darstellt.

Ferner, wenn Biegung an einem von O entfernten Punkte wie A eintritt, und die Tangente bei A wird als fixirt betrachtet, so hat sich O unter sie gesenkt und die Grösse der Senkung hängt sowohl von dem Betrage der Biegung beim Punkte A, als auch von dessen Entfernung von O ab. Daher ist die Senkung unter die Tangente bei A proportional zu $\sum\left(\frac{Mx}{I}\right)$; und dies sagt Gleichung (5) oder (5′) aus.

Es wird von Nutzen sein, mehrere Sätze, von welchen einige in den obigen Gleichungen enthalten sind, ausdrücklich zu erörtern; die Wichtigkeit und Anwendbarkeit von mehreren derselben ist vielleicht in diesem Zusammenhange noch nicht hinreichend erkannt worden.

Satz I. Jeder Träger, gerade oder nicht gerade, auf den nur verticale Kräfte wirken (d. h. bei dem kein Horizontalschub vorhanden ist), trägt an jedem Querschnitt den von der Last herrührenden Druck einzig dadurch, dass er einen inneren Widerstand entwickelt, welcher der Scheerkraft gleich und entgegengesetzt ist, und einen zweiten, welcher dem Moment der einwirkenden Kräfte gleich und entgegengesetzt ist.

Satz II. Dagegen kann ein Seil, oder ein Bogen mit Gelenken an diesen Gelenken, dem Moment der einwirkenden Kräfte keinen Widerstand leisten und dasselbe wird von dem Horizontalschube vernichtet, der sich an den Unterstützungspunkten entwickelt, und von der Spannung oder Pressung, die sich längs des Seils oder des Bogens zeigt.

Es ist bekannt, dass das Seilpolygon seinen Namen daher hat, dass es die Form ist, die ein biegsames Seil oder ein Bogen haben kann, wenn die wirkenden Kräfte an ihm im Gleichgewicht sind. In

diesem Falle können wir der Kürze wegen sagen, dass die Kräfte von dem Seile oder dem Bogen ertragen werden, weil diese Seilpolygone sind.

Satz III. Wenn ein nicht vollständig biegsamer Bogen von Widerlagern getragen wird, gegen die er einen Schub mit horizontaler Componente ausüben kann, so wird das Moment der auf den Bogen wirkenden Kräfte an den Punkten, wo eine Biegung nicht möglich ist, zum Theil vernichtet, weil der Bogen annähernd ein Seilpolygon ist, zum Theil kraft seines Widerstandes als eines Trägers.

Aus dem Wesen des Seilpolygons erhellt es, dass es bei jedem gegebenen Belastungssystem möglich ist, einen Bogen von solcher Form (der des Seilpolygons) herzustellen, dass er durchaus keiner Versteifung bedarf, da in diesem Falle kein Streben nach Biegung an irgend einem Punkte vorhanden sein wird. Ebenso ist es klar, dass jeder von diesem Seilpolygon abweichende Theil des Bogens versteift werden muss, wie denn z. B. wenn zwei von einander entfernte Punkte durch einen geraden Träger verbunden würden, dieser versteift werden müsste, um die Stelle eines Theils des Bogens einzunehmen. Ferner, je grösser die Abweichung, desto grösser das so zu überwindende Biegungsmoment. Hieraus ergibt sich die allgemeine Wahrheit, die in dem Satze ausgesprochen ist.

Man wird bemerken, dass das an irgend einem Punkte eines geraden Trägers in Wirksamkeit tretende Moment nicht allein von den einwirkenden Kräften abhängt, welche die Polygonseiten des Seilpolygons liefern, sondern auch von dem Widerstande, den der Träger an Gelenken, Auflagern u. dgl. leisten kann. Wenn der Träger z. B. frei auf seinen Endauflagern ruht, so verschwindet das Widerstandsmoment an den Enden und die Schlusslinie des Seilpolygons verbindet die Enden des polygonalen Theils. Wenn jedoch die Enden horizontal fest eingemauert sind und zwei freie Gelenke sich an anderen Punkten des Trägers befinden, so wird der polygonale Theil sein wie zuvor; aber die Schlusslinie würde so gezogen werden, dass die Momente an diesen zwei Gelenken verschwänden. Obgleich die Bedingungen in anderen Fällen verwickelter sein mögen, als in den zur Erklärung gegebenen Beispielen, so ist doch in jedem die Lage der Schlusslinie in ähnlicher Weise bestimmt durch die Gelenke oder die Art der Unterstützung der Träger; denn diese liefern die Bedingungen, welche die Momente, d. h. die Ordinaten des Seilpolygons erfüllen müssen. So sind z. B. in einem geraden, gleichförmigen Träger ohne Gelenke, der an den Enden horizontal befestigt ist, die Bedingungen offenbar diese:

die totale Biegung zwischen den beiden Enden verschwindet, und die Einsenkung eines Endes unter die Tangente am anderen Ende verschwindet ebenfalls.

Satz IV.*) Wenn für irgend einen Bogen dasjenige (von seiner Belastung herrührende) Seilpolygon construirt wird, welches denselben Horizontalschub hat wie ihn der Bogen wirklich ausübt; und wenn dessen Schlusslinie gezogen wird mit Rücksicht auf die durch die Unterstützungen u. s. w. gegebenen Bedingungen; wenn ferner die Curve des Bogens selbst als ein zweites einer unbekannten Belastung entsprechendes Seilpolygon betrachtet wird und dessen Schlusslinie auch mit derselben Rücksicht auf Unterstützung u. s. w. gefunden ist: dann sind, wenn diese zwei Polygone so aufeinander gelegt werden, dass ihre Schlusslinien zusammen fallen und ihre Flächen sich theilweise decken, die zwischen diesen beiden Polygonen liegenden Ordinaten proportional zu den wahren in dem Bogen wirkenden Biegungsmomenten.

Die Biegungsmomente an jedem Punkte eines Bogens sind durch die einwirkenden Kräfte und die Gestalt des Bogens selbst bedingt. Die einwirkenden Kräfte sind diese: Die verticalen Kräfte, welche die Belastung und die verticalen Widerstände der Pfeiler umfassen; der Horizontalschub, und die von der Art der Unterstützung an den Pfeilern etwa hervorgerufenen Momente. Die Belastung mag alle anderen einwirkenden Kräfte hervorrufen oder nicht: auf jeden Fall werden die Biegungsmomente von der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit des Schubes u. s. w. von der Belastung nicht afficirt.

Was nun die Belastung und die dem Zwange bei den Pfeilern zukommenden Momente betrifft, so verursachen sie an jedem Punkte des Bogens dieselben Biegungsmomente, wie wenn sie auf einen geraden Träger derselben Spannweite einwirkten; denn weder die Kräfte noch die Hebelarme sind in den beiden Fällen verschieden. Aber der Horizontalschub, der an jedem Punkte im Bogen der gleiche ist, verursacht ein Biegungsmoment, das proportional ist zu seinem Arme, welcher die Entfernung seiner Wirkungslinie von dem Punkte des Bogens ist. Von dieser Einwirkungslinie wissen wir aber, dass sie die Schlusslinie ist. Daher sind die Ordinaten, welche die vom Horizontalschub herrührenden Biegungsmomente darstellen, eingeschlossen zwischen der Curve des Bogens und einer so gezogenen Schlusslinie, dass sie die durch Gelenke oder die Art der Unterstützung an den Pfeilern auferlegten Bedingungen erfüllt; folglich ist die gekrümmte neutrale Achse des

*) Siehe Nachtrag A.

Bogens das Seilpolygon oder Momentenpolygon, das dem Horizontalschub entspricht. Aber dieselben Bedingungen fixiren die Schlusslinie des Seilpolygons, welches die der Belastung und dem Zwange an den Pfeilern zukommenden Biegungsmomente darstellt. Daher findet man das resultirende Biegungsmoment, indem man an jedem Punkte den Unterschied der Ordinaten beider Polygone nimmt oder indem man sie von derselben Schlusslinie aus aufträgt, genau so wie in der Aufstellung unseres Satzes beschrieben wurde.

Aus diesem Satze ist auch ersichtlich, dass die Curve des Bogens selbst als die gebogene Schlusslinie des Polygons betrachtet werden kann, dessen Ordinaten die wirklichen Biegungsmomente sind; und das Polygon selbst ist der polygonale Theil des der Last zukommenden Seilpolygons.

Der Verfasser glaubt, dass Satz IV eine wichtige Zugabe zu unserer früheren Kenntniss betreffs der Biegungsmomente in einem Bogen enthält, und dass er die Grundlage liefert für die bisher fehlende Methode zur graphischen Aufsuchung des wahren Seilpolygons für die verschiedenen Arten von Bögen.

Satz V. Wenn Biegungsmomente M auf einen gleichförmigen, schrägen Träger in horizontalen Entfernungen x von O wirken, so wird der Betrag der senkrechten Einsenkung y_d derselbe sein, wie der eines horizontalen Trägers von demselben Querschnitte, der dieselbe horizontale Spannweite hat, und auf welchen dieselben Momente M in denselben horizontalen Entfernungen x von O wirken. Desgleichen, wenn Biegungsmomente M wie zuvor wirken, so wird der Betrag der horizontalen Verschiebung x_d derselbe sein, wie der eines senkrechten Trägers von demselben Querschnitte und derselben Höhe, auf welchen dieselben Momente M in denselben Höhen einwirken.

Es möge das Moment M in A wirken und es bewirke nach Gleichung (5) die Einsenkung in Fig. 1

$$OC = e \,.\, M \,.\, AO,$$

deren verticale und horizontale Componenten sind

$$y_d = CE \quad \text{und} \quad x_d = OE.$$

Fig. 1.

Da die Einsenkungen, die in einem Träger oder Bogen vorkommen, nur sehr klein sind, kann man $AOC = 90^0$ setzen und hat dann

$$AO : OF = OC : CE$$

$$CE = \frac{OC}{AO} \cdot OF = e \cdot M \cdot OF$$

$$y_d = e \,.\, Mx.$$

Ebenso
$$AO : AF = OC : OE$$

$$OE = \frac{OC}{AO} \cdot AF = e \,.\, M \,.\, AF$$

$$x_d = e \,.\, My.$$

Dasselbe lässt sich von allen andern Momenten an andern Punkten beweisen; daher ist ein ähnliches Resultat von ihrer Summe richtig, wodurch der Satz bewiesen ist.

Man könnte denken, dass es dem Nachweise an Schärfe fehle, wegen der Annahme dass $AOC = 90^0$.

Dies ist jedoch nicht der Fall, wie aus der analytischen Untersuchung dieser Frage von Bell*) gelegentlich der von ihm versuchten graphischen Behandlung des Bogens hervorgeht, in welcher die einzige Annahme die von allen Autoren zugegebene ist, dass die Krümmung genau proportional zu dem Biegungsmomente sei.

Wir könnten in diesem Satze $\frac{fM}{I}$ für $e \,.\, M$ substituiren und damit einen ähnlichen aber allgemeineren Satz in Betreff der Einsenkungen beweisen, den der Leser jedoch selbst leicht in Worten ausdrücken kann.

Die Aufmerksamkeit des Lesers soll noch auf den doppelten Sinn hingelenkt werden, in welchem M in unseren Grundformeln gebraucht wird. In Gleichung (3) ist die ursprüngliche Bedeutung von M diese: es ist der Zahlenwerth des Biegungsmomentes beim Punkte O; und wenn diese Grösse als Ordinate aufgetragen wird, so ist y_m der Bruchtheil oder das Vielfache davon.

In den Gleichungen (3), (4), (5) und (3'), (4'), (5') nimmt M eine etwas davon verschiedene und abgeleitete Bedeutung an und bedeutet die Intensität des Biegungsmomentes bei O. Die Intensität des Biegungsmomentes ist der auf eine Längeneinheit eines Trägers vertheilte Betrag und kann durch die Formeln genau erhalten werden:

$$M = \int_x^{x+1} M dx, \quad \sum_0^x (M) = \int_0^x M dx.$$

*) On Stresses in Rigid Arches, by Wm. Bell, M. Inst. C. E. Van Nostrand's Engineering Magazine. Vol. VIII.

In diesem abgeleiteten Sinne wird M geometrisch dargestellt durch eine Fläche, die eine Längeneinheit zur Breite, und zur Höhe den durchschnittlichen Werth der zuerst gefundenen Ordinate M längs der betrachteten Längeneinheit hat.

Somit ist das in den Gleichungen der Krümmung, Biegung und Einsenkung angewandte M um eine Dimension höher, als das in der Gleichung angewandte, welche das Moment der einwirkenden Kräfte ausdrückt; aber der doppelte Sinn braucht keine Verwirrung herbeizuführen und ist wohl geeignet, die in unserer Untersuchung vorkommenden Grössen aufs Kürzeste darzustellen.

Wenn ferner im Falle eines schrägen Trägers, wie er in Satz V. behandelt wird, das Biegungsmoment M, welches die dort behandelte Einsenkung verursacht, dargestellt wird, so muss es als ein Flächeninhalt zwischen zwei Normalen zum Träger erscheinen, die um eine Längeneinheit von einander entfernt sind.

Um Satz V. auf schräge und gekrümmte Träger anzuwenden, wie sie den Bogen in vollkommener Genauigkeit herstellen, ist noch ein Satz erforderlich:

Satz VI. Wenn Lasten von einem schrägen Träger getragen werden, und der Betrag der Einsenkung dieses Trägers, welche durch die Last verursacht wird, mit der Einsenkung eines horizontalen Trägers verglichen wird, welcher denselben Querschnitt und dieselbe horizontale Spannweite hat und in den nämlichen Senkrechten von denselben Kräften angegriffen wird wie der schiefe Träger, so ist die verticale Componente der Einsenkung des schrägen Trägers an irgend einem Punkte O gleich der entsprechenden verticalen Einsenkung des wagerechten Trägers multiplicirt mit der Sekante der Neigung.

Denn das Biegungsmoment sowohl des schrägen Trägers als auch des wagerechten ist dasselbe in derselben Verticalen; aber die Entfernung längs des schrägen Trägers übersteigt die längs des wagerechten Trägers im Verhältnisse der Sekante der Neigung zur Einheit, daher haben die bezüglichen Momentenflächeninhalte dieses selbe Verhältniss; deswegen stehen die Einsenkungen, welche zu ihren betreffenden Trägern an deren entsprechenden Punkten rechtwinklig sind, im Verhältnisse des Quadrates der Sekante zur Einheit, und die senkrechten Componenten der Einsenkungen stehen deswegen im Verhältnisse der Sekante der Neigung zur Einheit.

Bei der Anwendung dieses Satzes zur graphischen Construction für den Bogen wird es nothwendig sein, die Ordinate des Momentenpolygons an jedem Punkte dadurch zu vergrössern, dass man mit der

Sekante der Neigung des Bogens multiplicirt. Wenn die Ordinaten vertikal sind, so geschieht dieses leicht dadurch, dass man Normalen an jedem Punkte des Bogens zieht; dann sind die Entfernungen parallel mit diesen Normalen und derart, dass die verticale Componente jeder Entfernung das Biegungsmoment M ist, die Grössen welche anstatt M bei der Bestimmung der Einsenkung angewandt werden müssen.

In den Bögen, die wir behandelt haben, ist die Steigung ein so geringer Bruchtheil der Spannweite, dass die Sekante der Neigung an irgend einem Punkte die Einheit nicht überschreitet, oder um es anders zu sagen: die Länge des Bogens ist um eine vergleichsweise kleine Grösse von der wirklichen Spannweite verschieden. Man erhält unter solchen Umständen eine ziemlich genaue Annäherung, wenn man die Momente selbst bei Bestimmung der Einsenkung benutzt; und wir haben sie so in unseren Constructionen benutzt. Ein genaueres Resultat lässt sich erhalten, wenn man jede Ordinate mit der Sekante der Neigung des Bogens gegen den Horizont am betreffenden Punkte multiplicirt.

Ehe wir auf die besonderen Erörterungen und Constructionen eingehen, die wir im Auge haben, werden einige Worte über die allgemeine Frage betreffs der Art und Weise wie das Problem des Bogens sich darbietet, vielleicht die Beziehung zwischen dieser und gewissen früheren Untersuchungen klar machen.

Das von Rankine, Yvon Villarceau und anderen Analytikern aufgestellte Problem des Bogens war dieses: Gegeben die verticale Belastung; welches muss die Form eines Bogens sein, welches der Widerstand der Hintermauerung und der Widerlager, wenn die Last gar keine Biegungsmomente hervorbringt? Durch die Beantwortung dieser Frage erhalten sie die Gleichung und die Eigenschaften des besondern Seilpolygons, das die gegebene Last tragen kann.

Unser graphisches Verfahren löst diese Aufgabe vollständig, indem es sogleich das Seilpolygon construirt. Wir wollen bei dieser Gelegenheit bemerken, dass das analytische Verfahren zu verwickelter Natur ist, um in andern als einigen Fällen einfachster Art Anwendung finden zu können, während das graphische Verfahren alle Fälle mit gleicher Leichtigkeit umfasst.

Es ist jedoch die eben erwähnte Lösung eine sehr unvollständige Lösung der Aufgabe, wie sie in der Praxis auftritt; denn jede bewegliche Last stört die Vertheilung der Belastung, für welche der Bogen das Seilpolygon ist und führt Biegungsmomente ein. Aus ähnlichen Gründen ist es nothwendig, eine Hängebrücke zu versteifen. Der Bogen muss so entworfen werden, dass er auch diesen Momenten widerstehen

kann. Da dieses der Fall ist, so ist es von keiner besonderen Wichtigkeit, dass die für den Bogen in jedem gegebenen Falle gewählte Form derart sei, dass Biegungsmomente gänzlich vermieden würden, wenn keine sich bewegende Last einwirkte.

So viel wir wissen, ist es der allgemeine Gebrauch der Ingenieure, die Form und Dimensionen, sowie die Belastung eines projectirten Bogens anzunehmen und demnächst zu untersuchen, ob die angenommenen Dimensionen mit der nöthigen Stärke und Festigkeit verträglich sind. Wenn die Annahme für den vorliegenden Fall nicht passt, so wird sich dies durch das Eintreten von übermässigen Biegungsmomenten an gewissen Punkten bemerklich machen. Die dargelegten Betrachtungen liefern Anleitung zu einer neuen Annahme, welche zweckmässiger sein wird, indem es nothwendig ist, die Form des Bogens sich genauer derjenigen des Seilpolygons für die gegebene Belastung anschliessen zu lassen.

Die Frage kann als eine Frage der Materialersparung und Leichtigkeit der Construction, wie bei der Fachwerksbrücke, betrachtet werden. Bei dieser haben die Erbauer schon lange jeden Gedanken aufgegeben, Brücken zu bauen, in denen die Neigung der Streben und Zugstangen die Bedingung erfüllt, dass der theoretisch geringste Betrag von Material erforderlich ist. In der That ist der Unterschied zwischen dem theoretischen Minimum des Materials und dem Verbrauch in solchen Fällen, in welchen Streben und Zugstangen eine von der theoretischen sehr verschiedene Neigung haben, so gering, dass die Erreichung des Minimums von keiner praktischen Wichtigkeit ist. Aehnliche Betrachtungen auf den Bogen angewandt führen uns zu dem Schlusse, dass die gewählte Form in jedem Falle aus Segmenten eines oder mehrerer Kreise bestehen kann und dass zum Zwecke der Construction jeder Anforderung damit eben so vollständig Genüge geleistet werden kann, wie mit den complicirteren transcendenten Curven, die jene früher erwähnten Analytiker fanden. Wenn Rücksichten künstlerischer Art es wünschenswerth machen, Segmente von Parabeln, Ellipsen oder anderen ovalen Figuren zu wählen, so wird dieses von keiner grösseren Folge sein, als die besondere Gestalt der Fachwerke, wie sie concurrirende Brückenbauer wählen.

Ebenso können wir das Problem leicht in umgekehrter Weise behandeln, so nämlich: Man finde das System der Belastung, dessen Seilpolygon die angenommene Curve des Bogens ist. Daraus wird sich ergeben, wie ein gegebener Bogen so zu belasten ist, dass keine Biegungsmomente darin vorkommen. Man wird sehen, dass es oft sehr nütz-

lich sein wird, dies zu wissen; denn häufig können wir eine wünschenswerthe Form vollständig stabil und verwendbar machen dadurch, dass wir in der Hintermauerung offene Räume lassen, oder den Scheitel in passender Weise etwas belasten.

Zweites Kapitel.

Elastischer Bogen mit festen Enden.

Als speciellen Fall wollen wir die Brücke zu St. Louis besprechen, welche ein Stahlbogen in Gestalt eines Kreisbogens ist mit einer Sehne oder Spannweite von 518 Fuss (engl.) und einem Pfeil von einem Zehntel der Spannweite = 51.8 Fuss. Der elastische Bogen ist fest in die gewaltigen Auflager eingefugt, welche sich am oberen Theile der Widerlager befinden.

Es wird angenommen, dass die Widerlager weder dem Schube noch dem Gewichte des Bogens oder seiner Belastung nachgeben, was auch in den veröffentlichten Berechnungen angenommen war, nach denen die Construction ausgeführt wurde. Ferner wollen wir einstweilen annehmen, dass der Querschnitt des elastischen Bogens an allen Punkten dasselbe Trägheitsmoment I habe und werden hier blos die durch eine angenommene Belastung im Bogen hervorgerufenen Spannungen betrachten. Spannungen, die von Veränderungen in der Länge des Bogens, durch dessen Verkürzung bei der Belastung und durch den Temperaturwechsel herrühren, werden leicht durch ein Verfahren erörtert, welches dem in diesem Kapitel benutzten ähnlich ist und in einem der nachfolgenden Kapitel besprochen werden wird.

Es sei $b_8\, a b_8'$ in Fig. 2 [Taf. I] die neutrale Achse des Bogens, dessen Höhe ein Zehntel seiner Spannweite beträgt. Es sei $axyz$ die Fläche, welche die Last auf der linken Hälfte des Bogens ausdrückt, und $ax'y'z'$ die auf der rechten, so dass $y_p = a \,.\, P = xy$ auf der linken Seite, und $y_p = x'y'$ auf der rechten.

Man zerlege nun die Spannweite in sechzehn gleiche Theile bb_1, bb_1', u. s. w. und nehme an, dass die Belastung, welche in Wirklichkeit gleichmässig vertheilt ist, in den durch b, b_1, b_1' u. s. w. gehenden Senkrechten auf die Punkte a, a_1, a_1' u. s. w. des Bogens wirke; so dass die gleichen Lasten P auf jeden Punkt links von a und die gleichen Lasten $\frac{1}{2}P$ auf jeden Punkt rechts von a wirken, während $\frac{3}{4}P$ auf a wirkt.

Man betrachte nun b als den Pol eines Kräftepolygons dieser Lasten und trage die links von a wirkenden Lasten auf der durch b_8

gehenden Senkrechten auf, nämlich $b_8 w_1 = \frac{1}{2} P =$ der von der linken Seite auf a kommenden Last; $w_1 w_2 = P =$ der auf a_1 wirkenden Last; $w_2 w_3 = P =$ der auf a_2 wirkenden Last u. s. w. Indem man immer noch b als den Pol benutzt, trage man auf $b_8' w_1' = \frac{1}{2} P =$ der von der rechten Seite auf a kommenden Last; $w_1' w_2' = \frac{1}{2} P =$ der auf a_1' wirkenden Last u. s. w. Dies kommt auf dasselbe heraus, als ob alle Lasten auf derselben Senkrechten aufgetragen wären; sie sind theils rechts theils links gesetzt wegen der grösseren Bequemlichkeit bei der Construction. Nun ziehe man die Linie $b w_1$ bis dieselbe die Senkrechte 1 in c_1 schneidet; dann ziehe man $c_1 c_2$ parallel $b w_2$, und $c_2 c_3$ parallel $b w_3$, u. s. w. Ebenso ziehe man $b w_1'$ nach c_1'; alsdann $c_1' c_2'$ parallel $b w_2'$ u. s. w. Dann ist die gebrochene Linie $b c_1 \cdots c_8$ das den Gewichten links von a, und $b c_1' \cdots c_8'$ das den Gewichten rechts von a entsprechende Seilpolygon. Wäre das Polygon für die gleichförmig vertheilte Last (nicht als in einzelnen Punkten concentrirt betrachtet) construirt worden, so hätte man links eine durch die Punkte $b c_1 \cdots c_8$ gehende Parabel, rechts eine andere, durch die Punkte $b c_1' \cdots c_8'$ gehende erhalten. Aus den Eigenschaften dieser Parabel ist leicht ersichtlich, dass c_8 die Strecke $w_4 w_5$, und ebenso c_8' die Strecke $w_4' w_5'$ halbiren muss; welche Thatsache als Probe der Genauigkeit der Construction dient. Es ist jedoch diese Probe nicht so einfach im Falle unregelmässigerer Belastung.

Das Seilpolygon $c_8 b c_8'$ ist das von den belastenden Gewichten herrührende; wenn aber diese Gewichte auf einen geraden Träger mit festen Enden wirken, so erfordert diese Art der Unterstützung, dass die totale Biegung Null sei, wenn die Biegungen der verschiedenen Punkte längs des gesammten Trägers summirt werden; denn die Richtungen der Enden ändern sich nicht unter der Einwirkung der Gewichte, daher muss die positive Biegung die negative aufheben.

Durch unsere Gleichungen ausgedrückt wäre das:

$$y_b = d \cdot \Sigma(M) = 0, \quad \text{also} \quad \Sigma(M) = 0.$$

Dies ist eine der zwei Bedingungen, die uns ermöglichen, die Lage der wahren Schlusslinie $h_8 h_8'$ in diesem Falle festzusetzen.

Die andere Bedingung spricht aus, dass die algebraische Summe aller Einsenkungen dieses geraden Trägers Null sein muss, wenn die Enden horizontal befestigt sind.

Dieses erhellt aus der Thatsache, dass, wenn ein Ende eines Trägers eingemauert ist und eine Tangente zur neutralen Achse desselben an diesem Ende gezogen wird, diese Tangente unbewegt bleibt, welche

Durchbiegung auch immer der Träger annehmen mag; und wenn das andere Ende ebenfalls fest ist, so wird dessen Lage in Beziehung zu jener Tangente ebenfalls durch keine Biegungen geändert, welche der Träger erfahren mag.

Durch unsere Gleichungen ausgedrückt gibt dies

$$y_d = e \cdot \Sigma(Mx) = 0, \quad \text{daher} \quad \Sigma(Mx) = 0.$$

Die Methode der Einführung dieser Bedingungen verdanken wir Mohr*).

Man betrachte die von der geraden Linie c_8c_8' und dem Polygon c_8bc_8' umschlossene Fläche als irgend eine Art positiver Belastung; wir wollen untersuchen, welche negative Belastung man zufügen muss, um die obigen zwei Bedingungen zu erfüllen. Offenbar muss die negative Belastung numerisch der ganzen positiven Belastung gleich sein, wenn sich ergeben soll $\Sigma(M) = 0$. Demnächst mag, da die Schlusslinie gerade sein soll, die negative Belastung $c_8c_8'h_8h_8'$ in zwei Theilen betrachtet werden, nämlich in den zwei Dreiecken $c_8c_8'h_8$ und $c_8'h_8h_8'$. Man zerlege die ganze Spannweite in drei gleiche Theile durch die Punkte t und t'; dann kann man die ganze negative Belastung als in den durch t und t' gehenden Senkrechten wirkend betrachten, da die Schwerpunkte der Dreiecke in diese Senkrechten fallen.

Ebenso wird es sich zweckmässig erweisen, die positive Belastung zu vertheilen in das Dreieck c_8bc_8' in der durch b gehenden Senkrechten wirkend; in die Parabelfläche $bc_1 \cdots c_8$ in der Senkrechten 4, die den Schwerpunkt derselben enthält, wirkend, und die Parabelfläche $bc_1' \cdots c_8'$ in 4′ wirkend.

Um die durch diese Flächen dargestellten Lasten vergleichen zu können, müssen wir sie in gleichflächige Dreiecke oder Rechtecke mit gleicher Grundlinie verwandeln. Es sei die Hälfte der Spannweite diese gemeinschaftliche Grundlinie; dann sind $bb_0 = pp'$ die durch das Dreieck c_8bc_8' und $\frac{4}{3}c_4c_0 = pp_1$ und $\frac{4}{3}c_4'c_0' = p'p_1'$ die durch die beiden Parabelflächen dargestellten Lasten.

Nun nehme man irgend einen Punkt q als Pol für die Lastlinie p_1p_1' und suche den Schwerpunkt der positiven Belastung durch Zeichnung des Seilpolygons, dessen Seiten mit den Linien des Kräftepolygons parallel sind. Wenn man als erste und zweite Seite qp_1 und qp verwendet, ferner pq' parallel qp', $q'q_1$ parallel qp_1' zieht, so schneiden sich die erste und die letzte Seite in q_1; folglich muss der Schwerpunkt der positiven Lasten in der durch q_1 gehenden Senkrechten liegen.

*) Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructionen. Zeitschr. d. Hannov. Ing.- u. Arch.-Ver. 1868.

Nun muss die negative Belastung ihren Schwerpunkt in derselben Senkrechten haben, damit der Bedingung $\Sigma(Mx) = 0$ Genüge geschehe; denn $\Sigma(Mx)$ ist der Zähler des allgemeinen Ausdruckes zur Auffindung des Schwerpunktes der Belastung. Somit gestaltet sich die Frage folgendermassen: Welche negative Lasten müssen in den Senkrechten durch t und t' wirken, damit ihre Summe $p_1 p_1'$ sei und ihr Schwerpunkt in der Senkrechten durch q_1 liege?

Eine wohlbekannte Art, diese zwei Segmente von $p_1 p_1'$ zu erhalten ist r und r', die in den Horizontalen durch p_1 und p_1' liegen, zu verbinden, und eine Horizontale durch q_0 zu ziehen, welches der Durchschnittspunkt von rr' und der Senkrechten durch q_1 ist; dann sind rr_1 und $r'r_1'$ die gesuchten Segmente der negativen Last. Denn, angenommen es sei $rr_2 = p_1'p_1$ und r' als der Pol der Last rr_2 betrachtet, so haben wir, da $r_1 q_0$ parallel $r_2 r'$ und $q_0 r'$ parallel rr', das Seilpolygon $r_1 q_0 r'$, welches die erforderlichen Bedingungen erfüllt.

Nun sind diese zwei negativen Lasten $r_1 r_2 = r_1'r'$ und rr_1 die Höhen der Dreiecke $c_8 h_8 c_8'$ und $c_8 c_8' h_8'$; man mache daher $c_8 h_8 = r'r_1'$ und $c_8' h_8' = rr_1$.

Die Schlusslinie $h_8 h_8'$ kann dann gezogen werden und die Biegungsmomente des geraden Trägers werden dann proportional zu $h_1 c_1, h_2 c_2$ u. s. w. sein, indem die Inflexionspunkte sich da befinden, wo die Schlusslinie das Polygon schneidet. Wenn die Construction genau und richtig ausgeführt ist, so ist der Flächeninhalt über der Schlusslinie dem unter derselben gleich; eine Probe, die leicht anzustellen ist.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der Curve des Bogens selbst und betrachten wir dieselbe als ein Seilpolygon. Da der Pfeil des Bogens ein so geringer Bruchtheil der Spannweite ist, so ist die Curve eine ziemlich flache für unsere Zwecke und wir werden deshalb die Ordinaten ab, $a_1 b_1$ u. s. w. mit irgend einer unserem Zwecke dienlichen Zahl multipliciren, z. B. mit 3.

Dadurch erhalten wir ein Polygon $d_8 d d_8'$ derart, dass $db = 3ab$, $d_1 b_1 = 3a_1 b_1$ u. s. w. Wenn durch $d_8 \cdots d \cdots d_8'$ eine Curve gezogen wird, so wird diese der Bogen einer Ellipse sein, in welcher d das Ende der grossen Achse ist.

Wenn wir die Schlusslinie $k_8 k_8'$ dieser Curve finden wollen, so dass $\Sigma(M_d) = 0$ und $\Sigma(M_d x) = 0$ ist, so ist das eben benutzte Verfahren auch hier anwendbar; aber da die Curve symmetrisch ist, so kann der Zweck leichter erreicht werden. Zufolge dieser Symmetrie um die Senkrechte durch b enthält diese Linie den Schwerpunkt der positiven über der durch b gehenden Horizontalen gelegenen Fläche.

Ebendaselbst muss auch der Schwerpunkt der negativen Fläche liegen; daher ist die negative Fläche symmetrisch um die mittlere Senkrechte. Folglich muss die gesuchte Schlusslinie horizontal sein. Somit bleibt noch übrig, die Höhe eines Rechtecks zu finden, das den gleichen Flächeninhalt wie das Ellipsensegment und die Spannweite zur Grundlinie hat. Dieses geschieht in dem Falle, wo die Spannweite in 16 gleiche Theile getheilt ist, mit grosser Annäherung dadurch, dass man $\frac{1}{8}$ der Summe aller Ordinaten b_1d_1 u. s. w. minus $\frac{1}{16}$ der mittleren Ordinate nimmt. Wir finden auf diese Weise die Höhe bk, und die Horizontale durch k ist die gesuchte Schlusslinie.

Ehe wir den Vergleich zwischen den Polygonen c und d, wie wir die Polygone c_8bc_8' und d_8dd_8' kurzweg nennen, anstellen, wollen wir auf die Bedeutung gewisser Operationen hinweisen, welche in der vorliegenden Construction von Nutzen sind. Eine davon ist die Multiplication der Ordinaten des Polygons oder der Curve a, um diejenigen von d zu erhalten. Wäre a umgekehrt, so könnten an den Punkten a_1, a_2 u. s. w. gewisse Gewichte aufgehängt werden, derart, dass die Curve in stabilem Gleichgewichte wäre, selbst wenn biegsame Gelenke sich an diesen Punkten befänden. Auch bei der hier benutzten aufrechten Stellung würde unter Einwirkung derselben Gewichte Gleichgewicht stattfinden, obgleich es nicht stabil wäre. Wenn wir nun durch irgend einen Punkt Linien ziehen, parallel mit den Seiten aa_1, a_1a_2, aa_1' u. s. w. des Polygons, so wird jede senkrechte Linie, welche dieses Strahlenbüschel schneidet, durch dasselbe in Segmente getheilt werden, welche den Gewichten proportional sind, die a zu ihrem Seilpolygon haben. Dadurch, dass wir die Senkrechte in angemessener Entfernung vom Pole ziehen, können wir deren Gesammtlänge d. h. die Gesammtlast auf dem Bogen beliebig gross annehmen. Der horizontale Abstand dieser Senkrechten vom Pole, nach demselben Maasstabe wie die Last gemessen, wird der wirkliche Horizontalschub des Bogens sein. Construirt man ebenso ein Strahlbüschel, dessen Strahlen den Seiten des Polygons d parallel sind, und ist die Last dieselbe, wie beim Polygon a, so muss, wie man sofort sieht, die Poldistanz für d ein Drittel derjenigen für a sein; denn jede Linie in d hat die dreifache Steigung der entsprechenden in a, und folglich bei gleicher Steigung nur ein Drittel der horizontalen Spannweite. Das Wachsen der Ordinaten bedeutet also eine Abnahme der Poldistanz im gleichen Verhältnisse, und umgekehrt. Bekanntlich ist das Product der Poldistanz mit der Ordinate des Seilpolygons das Biegungsmoment. Dieses Product wird nicht geändert durch Aenderung der Poldistanz.

Man nehme ferner an, der verticale, die Belastung darstellende Theil oder die Lastlinie eines Kräftepolygons beharre in einer bestimmten Lage, und der Pol werde in senkrechter Richtung in eine neue Lage gebracht. Dadurch wird die Länge keiner verticalen oder horizontalen Strecke des Kräftepolygons geändert; ebensowenig wird eine solche Strecke des neuen, der zweiten Lage des Poles zugehörigen, Seilpolygons verschieden sein von der entsprechenden im ersten, mit der früheren Lage des Poles construirten, Polygon. Die Richtung der Schlusslinie jedoch wird verändert. So sehen wir, dass wir die Schlusslinie eines jeden Seilpolygons mit jeder nicht senkrechten Linie zusammenfallen lassen können, und dass dessen Ordinaten durch die Operation nicht geändert werden. Es ist unnöthig, das Kräftepolygon zu zeichnen, um diese Aenderung herbeizuführen.

Um nun die Verwandtschaft zwischen den Polygonen c und d klar zu machen, wollen wir einstweilen annehmen, dass das Polygon e durch irgend welche bis jetzt unbekannte Mittel so gezeichnet worden ist, dass seine Ordinaten, von d an gerechnet, nämlich $e_1 d_1 = y_1$, $e_2 d_2 = y_2$ u. s. w. proportional sind zu den wirklichen Momenten M_e, welche den Bogen zu biegen streben.

Die Bedingungen, welche dann in Bezug auf diese Momente M_e gelten, sind drei, nämlich:

$$\Sigma(M_e) = 0, \qquad \Sigma(M_e x) = 0, \qquad \Sigma(M_e y) = 0.$$

Die erste Bedingung muss erfüllt sein, weil die totale Biegung von einem Ende zum anderen gleich Null ist, wenn die Enden fest sind. Die zweite und dritte sind wahr, weil die gesammte Einsenkung sowohl in verticaler, als auch horizontaler Richtung Null ist, da nicht nur die Spannweite, sondern auch die Lage der Tangenten an den Enden unveränderlich ist. Diese Ergebnisse sind in Uebereinstimmung mit Satz V. Nach Satz III sind diese Momente M_e die Unterschiede der Momente eines geraden Trägers und des Bogens selbst; daher ist das Polygon e nichts weiter als das Polygon c in einer neuen Lage und mit einer neuen Poldistanz.

Da durch solche Transformationen die Momente unverändert bleiben, so wollen wir diese Momente durch M_c bezeichnen. Nun haben wir oben gesehen, dass

$$\Sigma(M_c) = 0, \text{ und } \Sigma(M_c x) = 0 \text{ ist.}$$

Subtrahiren wir also, so entsteht

$$\Sigma(M_c - M_e) = 0, \text{ und } \Sigma[(M_c - M_e)x] = 0$$

oder

$$\Sigma(M_d) = 0, \text{ und } \Sigma(M_d x) = 0.$$

Hieraus ist zu ersehen, dass die Schlusslinie des Polygons d dieselben Bedingungen erfüllen muss, wie die des Polygons c. Auch dies ist in Uebereinstimmung mit Satz IV.

Ferner haben wir

$$\Sigma(M_e y) = \Sigma[(M_c - M_d) y] = 0,$$

woraus hervorgeht $\Sigma(M_c y) = \Sigma(M_d y)$.

Diese letzte Bedingung werden wir gebrauchen, um die Poldistanz des Polygons e zu bestimmen, welche ein Drittel des wirklichen Schubs des Bogens darstellt, gemessen nach dem Maasstabe der Gewichte w_1, w_2 u. s. w.

Die physikalische Bedeutung dieser Bedingung kann nach Satz V so ausgedrückt werden: Wenn die Momente M_d auf einen gleichförmigen senkrechten Träger bd in den Punkten b, b_7'', b_6'', b_5'' u. s. w., die in derselben Höhe mit b_8, d_7 u. s. w. liegen, einwirken, so werden sie dieselbe Gesammteinsenkung $x_d = e \cdot \Sigma(M_d y)$ hervorbringen, wie die Momente M_c, wenn sie an denselben Punkten angreifen. Folglich können wir, wenn die M_d als eine Art Belastung benutzt werden, die Einsenkung durch ein Seilpolygon erhalten. Angenommen die Last bei d_7 sei $d_7 k_7$, und die bei d_6 sei $d_6 k_6$ u. s. w., dann ist die bei b_8 gleich $\frac{1}{2} b_8 k_8$. Diese Annäherung ist für unsere Zwecke hinreichend genau.

Nun trage man auf $l_8 l_8'$, als auf einer Lastlinie, $dm_8 = \frac{1}{2} b_8 k_8$, $m_8 m_7 = d_7 k_7$, $m_7 m_6 = d_6 k_6$, u. s. w. auf. Die Richtung dieser Lasten verändert sich, wenn sie auf die andere Seite der Linie k fallen; z. B. ist $m_5 m_4 = k_4 d_4$ u. s. w. Wird dieses Verfahren über den ganzen Bogen fortgesetzt, so wird m_5' (das nicht gezeichnet ist) soweit rechts von d fallen, als m_5 links und die letzte Last wird gerade wieder bis d reichen. Dies ist eine Probe der Genauigkeit, mit welcher die Lage der Linie $k_8 k_8'$ gefunden worden ist. Nun ziehe man, indem man irgend einen Punkt, z. B. b als Pol annimmt, bm_8 nach f_7, weiter $f_7 f_6$ parallel bm_7, $f_6 f_5$ parallel bm_6 u. s. w. Dann ist die Curve bf die vergrösserte Gestalt eines senkrechten bei b befestigten Trägers bd, unter der Einwirkung desjenigen Theiles der Momente M_d, welcher in der linken Hälfte des Bogens sich befindet. Die Momente M_d zur Rechten mögen auf einen andern, gleichen Träger wirken, der dieselbe ursprüngliche Lage bd hat und dieser wird sich dann in gleichem Maasse nach rechts von bd verbiegen. Dieser Träger ist nicht gezeichnet.

Weiter nehme man an, diese senkrechten bei b befestigten Träger würden statt dessen durch die Momente M_c gebogen. Wir wissen nicht genau, wie gross diese Momente sind; wohl aber wissen wir, dass sie proportional zu den Ordinaten des Polygons c sind. Man mache des-

halb $dn_8 = \frac{1}{2}h_8c_8$, $n_8n_7 = h_7c_7$, $n_7n_6 = h_6c_6$ u. s. w. Wenn alle diese Lasten aufgetragen sind, so muss die letzte $n_8'd = \frac{1}{2}h_8'c_8'$ gerade nach d zurückkommen. Dieses liefert eine Probe für die Genauigkeit der Arbeit bei der Bestimmung der Lage von h_8h_8'. Indem wir nun wie zuvor b als Pol benutzen, construiren wir die Einsenkungscurven bg und bg'. Da diese zwei Einsenkungen, nämlich $2df$ und gg', dieselben sein sollten, so lehrt uns diese Thatsache, dass alle Ordinaten h_1c_1, $h_2c_2 \cdots$ im Verhältnisse von $\frac{1}{2}gg'$ zu df vergrössert werden müssen, um, wenn sie als Lasten betrachtet werden, eine Totaleinsenkung gleich $2df$ hervorzubringen. Um dies zu bewirken, trage man $bj = df$ und $bi = \frac{1}{2}gg'$ auf und ziehe die Horizontalen durch i und j. In irgend einer passenden Entfernung ziehe man Senkrechte i_0j_0 und die Linien bi_0 und bj_0. Diese zwei letzten Linien ermöglichen es uns, die erforderlichen Vergrösserungen für alle beliebigen Ordinaten zur Linken herzustellen, und diese oder zwei Linien von derselben Neigung auf der rechten Seite leisten dasselbe für die rechte Seite. Man trage z. B. die Ordinate $bi_8' = h_8'c_8'$ an, so ist die gesuchte neue Ordinate bj_8'. Dann trage man $k_8'e_8' = bj_8'$ auf. In derselben Weise findet man ke durch hb, und k_8e_8 durch h_8c_8. Dasselbe Verfahren liefert auch die anderen Ordinaten k_1e_1 u. s. w.; aber dies ist nicht der beste Weg zur Bestimmung der übrigen derselben, denn wir können jetzt den Pol und die Poldistanz des Polygons e finden.

Wie wir früher gesehen haben, nimmt die Poldistanz in demselben Verhältnisse ab, wie die Ordinaten der Momentencurve zunehmen; deshalb verlängere man bi_0 nach v_1 und ziehe eine Horizontale durch v_1, welche bj_0 in v_2 und die mittlere Verticale bei v_0 schneidet; dann ist v_2v_0 die im erforderlichen Verhältnisse verminderte Poldistanz. Daher rücken wir die Gewichtslinie v_1v_8 hinauf in die Lage u_1u_8 senkrecht durch v_2; und der Bequemlichkeit wegen tragen wir die Gewichte $w_1'w_2'$ bei $u_1'u_2'$ u. s. w. auf.

Fernerhin wissen wir, dass die neue Schlusslinie horizontal ist. Um die Lage des Poles o so zu finden, dass dies der Fall sei, ziehen wir bv parallel zu hh_8 und von v aus die Horizontale vo. Wie wohlbekannt ist, theilt v das Gesammtgewicht in die zwei Segmente, welche die senkrechten Widerstände der Widerlager darstellen, und wenn der Pol o auf derselben Horizontalen mit v liegt, wird die Schlusslinie horizontal sein.

Nachdem man nun die Lage der Punkte e_8, e, e_8' von irgend einem derselben, z. B. von e_8 ausgehend, bestimmt hat, ziehe man e_8e_7 parallel ou_8, e_7e_6 parallel ou_7 u. s. w.; ist die Zeichnung genau, so

wird dann das Polygon durch die zwei andern Punkte e und e_8' gehen. Die Biegungsmomente des Bogens d oder des Bogens a bei a_1, a_2 u. s. w. sind die Producte der Poldistanz $v_0 v_2 = v' o$ mit den Ordinaten $d_1 e_1$, $d_2 e_2$ u. s. w. respective, und zwischen diesen Punkten gibt ein ähnliches Product das Moment mit hinreichender Genauigkeit. Es wäre vortheilhaft, der Genauigkeit wegen, die Ordinaten des Bogens mit einer Zahl grösser als 3 zu multipliciren.

Als endgiltige Probe der Genauigkeit der Arbeit wollen wir sehen, ob $\Sigma(M_e y)$ wirklich Null ist, wie es sein soll. Bei d_7 ist z. B. $y = d_7 l_7$, und M_e ist proportional zu $d_7 e_7$. Dann ist $\overline{d_7 s_7}^2$ proportional zum Werthe von $M_e y$ an diesem Punkte, wenn $e_7 s_7$ der Bogen eines Kreises ist, dessen Durchmesser $e_7 l_7$ ist. Auf ähnliche Weise findet man $d_7' s_7'$ u. s. w. Wenn e_4 z. B. über d_4 fällt, so muss der Kreis über der Summe von $l_4 d_4$ und $d_4 e_4$ als Durchmesser beschrieben werden und $\overline{d_4 s_4}^2$ ist proportional mit einem Momente, dessen Vorzeichen von dem des Momentes bei d_7 verschieden ist. Wir haben die Vorzeichen der Momente an den verschiedenen Punkten längs des Bogens dadurch bezeichnet, dass wir verschiedene Vorzeichen vor den Buchstaben s setzten. Es wäre etwas genauer gewesen, blos die Hälfte der Ordinaten $b_8 e_8$ und $b_8' e_8'$ zu brauchen; aber da sie in diesem Falle nahezu gleich und entgegengesetzten Vorzeichens sind, so haben wir keinen grossen Fehler begangen.

Nun trage man bei irgend einem Punkte s auf $s s_7 = d_7 s_7$ und rechtwinkelig dazu $s_7 s_8 = b_8 s_8$, und rechtwinkelig zu der Hypotenuse $s s_8$ mache man $s_8 s_5' = d_5' s_5'$ u. s. w. Dann ist die Summe der positiven Quadrate $= s s_1'$ und ähnlich ist die der negativen $= s s_1$. Sind diese gleich, so verschwindet $\Sigma(M_e y)$ wie es soll, und die Construction ist richtig.

Es wäre eben so richtig gewesen, vorauszusetzen, die beiden senkrechten Träger seien in d befestigt und würden durch die wirkenden Momente gebogen. Wir hätten das erforderliche Verhältniss eben so gut aus dieser Construction bestimmen können. Als wir ferner die Richtigkeit der Construction dadurch bewiesen, dass wir die algebraische Summe der Quadrate bildeten, hätten wir die Ordinaten y eben so gut von irgend einer anderen Linie aus rechnen können, wie von $l_8 l_8'$.

Um die resultirende Spannung in den verschiedenen Theilen des Bogens zu finden, müssen wir $v' o$ bis o' verlängern (nicht gezeichnet), so dass die Poldistanz $v' o' = 3 v' o$; wenn wir dann o' und u_8 verbinden, so wird $o' u_8$ die resultirende Spannung in dem Segmente $b_8 a_7$ sein, $o' u_7$ wird die Spannung in $a_7 a_6$ sein u. s. w., wenn diese Längen

mit demselben Maasstabe gemessen werden wie die Gewichte $w_1 w_2$ u. s. w. Diese resultirende Spannung ist nicht längs der neutralen Achse des Bogens gerichtet.

Die verticale Scheerkraft wird in derselben Weise construirt wie für einen Träger, indem man eine Horizontale durch w_8 zwischen den Verticalen 7 und 8 zieht, eine zweite durch w_7 zwischen 7 und 6 u. s. w. (sie sind nicht gezeichnet). Die Scheerkräfte werden dann durch die verticalen Entfernungen zwischen vo und diesen Horizontalen gemessen. Man sieht, dass bei der angenommenen Belastung die Scheerkraft in der Verticalen durch b_1 ihr Vorzeichen ändert.

Die wirkliche Lage der Schwerlinie der Last lässt sich durch Verlängerung der ersten und der letzten Seite des Polygons c finden. Ein Gewicht $= \frac{1}{2} P = w_8 w_9$ sollte jedoch zuerst an b_8 und ein zweites $= \frac{1}{2} P = w_8' w_9'$ bei b_8' angebracht werden. Die Scheerkraft in Folge einer vertheilten Last wird thatsächlich auf der so gefundenen Senkrechten ihr Vorzeichen ändern. Diese Senkrechte wird jedoch nicht weit von b_1 vorbeigehen. Die resultirende Spannung ist die Resultante des Horizontalschubs und der verticalen Scheerkraft und lässt sich in einen Tangentialschub längs des Bogens und eine normale Scheerkraft zerlegen. Diese Zerlegung wird in Fig. 3 des nächsten Kapitels vorgenommen werden.

Betreffs der Lage der beweglichen Last, welche die grössten Biegungsmomente hervorbringen wird, können wir sagen, dass die gewählte Art der Belastung, in welcher die bewegliche Last die Hälfte der Spannweite einnimmt, gemeiniglich nahezu diesen Fall ergibt. Es ist jedoch möglich, eines oder zwei der Momente um ein Geringes zu vermehren, dadurch, dass man ein wenig mehr als die Hälfte der Spannweite mit der beweglichen Last bedeckt.

Die Belastung, welche die Maximalmomente hervorbringt, wird in späteren Kapiteln ausführlicher besprochen werden.

Die grösste resultirende Spannung und die grösste verticale Scheerkraft finden im Allgemeinen statt, wenn die bewegliche Last die ganze Spannweite bedeckt. Die Construction ist in diesem Falle sehr vereinfacht, da das Polygon c dann dasselbe rechts von d ist, wie jetzt links davon, und der Schwerpunkt der Fläche in der mittleren Senkrechten liegt; so dass die Schlusslinie $h_8 h_8'$ horizontal ist und mit derselben Leichtigkeit gezogen werden kann, wie $k_8 k_8'$ gezogen wurde. Wir werden jedoch in diesem Falle nicht gezwungen sein, die Curven bg und bg' zu ziehen, welche beide gleich sein werden; denn wie man leicht sieht, muss die Summe der positiven Momente M_c links sehr

annähernd gleich sein der Summe der positiven Momente M_d links und dasselbe gilt auch für die negativen Momente zur Linken. Dieselben zwei Gleichheiten finden auch für die rechte Seite statt. Daraus erhalten wir sogleich das Verhältniss, nach welchem wir die Ordinaten des Polygons *c* verändern müssen, um diejenigen des Polygons *e* zu erhalten.

Diese letzte annähernde Construction zeigt uns auch, dass für eine gleichförmige Gesammtbelastung, von den vier Inflexionspunkten, wo das Biegungsmoment Null ist, zwei unterhalb und zwei oberhalb der Schlusslinie liegen. Für den Fall, dass die bewegliche Last nur einen Theil der Spannweite bedeckt, ist es oft eine hinreichend genaue Annäherung, das erforderliche Verhältniss dadurch herzuleiten, dass man annimmt, die Summe aller Ordinaten zur Rechten und zur Linken oberhalb der Schlusslinie des Polygons müsse so vermehrt werden, dass sie der entsprechenden Summe im Polygon *d* gleich werde. Wenn die unterhalb der Schlusslinie genommenen Summen ein etwas verschiedenes Ergebniss liefern, so nehme man das arithmetische Mittel.

So gibt die einzige Construction, die wir in Fig. 2 [Taf. I] gegeben haben, und noch eine andere viel einfachere als diese, die durch Beifügung einiger Linien zu Fig. 2 hergestellt werden kann, eine ziemlich vollständige Bestimmung der Maximalspannungen auf Grund der im Anfang dieses Kapitels gemachten Annahmen.

Eine dieser Annahmen, nämlich die eines constanten Querschnittes (d. h. $I =$ constant), verdient noch eine Bemerkung. Im St. Louiser Bogen wurde I an jedem Ende um die Hälfte vergrössert auf eine Entfernung von einem Zwölftel der Spannweite. Diese sehr beträchtliche Aenderung im Werthe von I verminderte die für einen constanten Querschnitt berechneten Maximalmomente etwas. Aus anderen ausführlichen Berechnungen, besonders denen von Heppel*) über die Britannia-Röhren-Brücke, erhellt es, dass die Aenderungen in den Querschnitten, durch welche der Bogen den Spannungen angepasst wird, die er aushalten soll, nur relativ kleine Variationen der Momente nach sich ziehen, die in den gewöhnlichen Fällen nicht einmal 5% der Gesammtspannung betragen. Dieselben Betrachtungen sind nicht anwendbar nahe den freien Enden eines continuirlichen Trägers, wo I theoretisch verschwinden kann. Im vorliegenden Falle, wo der Haupttheil der Spannung nicht von den Biegungsmomenten herrührt, sondern von der Compression längs des Bogens, ist die Wirkung des Wechsels von I in der That sehr unbeträchtlich.

*) Philosophical Magazine, Vol. 40, 1870.

Drittes Kapitel.

Bogen mit festen Enden und einem Gelenke im Scheitel.

Es möge die Curve a der Fig. 3 [Taf. II] den Bogen darstellen, den wir brauchen werden, um die Methode, die bei Bogen von dieser Art angewendet werden muss, zu erklären. Der Bogen a ist ein Kreisbogen und hat einen Pfeil von einem Fünftel der Spannweite. Es ist nicht nothwendig, die einzelnen Dimensionen in Fussen auszudrücken, da das oben genannte Verhältniss genügend ist, um die Gestalt des Bogens zu bestimmen.

Der Bogen wird als in den Widerlagern so befestigt angenommen, dass eine zur Curve a an einem der beiden Widerlager gezogene Tangente in ihrer Richtung durch irgend eine Verbiegung, die der Bogen erleiden mag, nicht verändert wird. Im Scheitel jedoch ist ein Gelenk, das sich ungehindert drehen kann, und das somit keinem Biegungsmomente die Fortpflanzung von einer Seite zur anderen gestattet. Um die Construction genauer zu machen, wollen wir die Ordinaten der Curve a mit einer passenden Zahl, z. B. 2 multipliciren, obgleich Multiplication mit einer grösseren Zahl zu grösserer Genauigkeit führen würde. Wir erhalten so das Polygon d.

Nachdem wir die Spannweite b in 12 gleiche Theile $b_1 b_2$ u. s. w. zerlegt haben (eine grössere Zahl von Theilen wäre für die Erörterung eines wirklichen Falles besser), tragen wir unterhalb der horizontalen Linie b auf den Senkrechten durch die Enden des Bogens Längen auf, die in irgend einem angenommenen Maasstabe die Gewichte ausdrücken, die an den Theilungspunkten des Bogens concentrirt gedacht werden. Wenn al die Höhe der Belastung zur Linken und $al' = \frac{1}{2} al$ die zur Rechten ist, so ist $b_6 w_1 + b_6' w_1' =$ dem bei a concentrirten Gewichte; $w_1 w_2 =$ dem Gewichte bei a_1; $w_1' w_2' =$ dem Gewichte bei a_1' u. s. w. Indem man b als Pol benutzt, zeichnet man das Seilpolygon c, dessen Enden $c_6 c_6'$ die Linien $w_3 w_4$ und $w_3' w_4'$ respective halbiren.

Nun wäre die Schlusslinie dieses Seilpolygons zu finden, so dass seine Ordinaten proportional sind den Biegungsmomenten eines geraden Trägers mit derselben Spannweite und constantem Trägheitsmoment I, der an den Enden horizontal eingemauert und mit einem Gelenke in der Mitte versehen ist. Um diese Aufgabe zu lösen, beachten wir zuerst, dass das Biegungsmoment am Gelenke Null ist und die Ordinate des Seilpolygons daher an diesem Punkte verschwindet. Die Schluss-

linie geht folglich durch b, den fraglichen Punkt. Ferner ist es offenbar, dass, wenn wir die Theile des Trägers rechts und links vom Mittelpunkte als zwei besondere Träger betrachten, deren Enden am Mittelpunkte verbunden sind, diese Enden in Folge der Verbindung dieselbe Einsenkung erleiden.

Dies wird mittelst unserer Gleichungen ausgedrückt, wenn wir sagen, dass $\Sigma(Mx)$, wenn die Summation von einem Ende bis zum Centrum ausgedehnt wird, gleich ist $\Sigma(Mx)$, wenn die Summation vom andern Ende bis zum Centrum ausgedehnt wird; denn diese sind dann proportional zu den betreffenden Einsenkungen des Centrums. Es lässt sich dies so schreiben:

$$\Sigma_{b_6}^{b}(Mx) = \Sigma_{b_6'}^{b}(Mx).$$

Die Gleichung hat die Bedeutung, dass der Schwerpunkt der rechten und linken Momentenflächen zusammen in der mittleren Verticalen liegt; denn wenn man jedes Moment M als Gewicht annimmt, so ist x sein Hebelarm und Mx sein Moment um das Centrum.

Um zu finden, in welcher Richtung man die Schlusslinie durch b ziehen soll, damit die Momentenflächen zusammen ihren Schwerpunkt in der mittleren Verticalen durch b haben, wollen wir ein zweites Seilpolygon ziehen, indem wir die Momentenflächen als eine Art der Belastung benutzen.

Die Fläche links, die zwischen irgend einer angenommenen Schlusslinie, wie bb_6 (oder bh_6) und dem Polygon bc_6 eingeschlossen ist, kann betrachtet werden als bestehend aus einer positiven dreieckigen Fläche bc_6b_6 (oder bc_6h_6) und einer negativen parabolischen Fläche $bc_3c_6c_0$; und ähnlich ist die Fläche zur Rechten die Summe aus einer positiven Fläche $bc_6'b_6'$ (oder $bc_6'h_6'$) und einer negativen Fläche $bc_3'c_6'c_0'$.

In zwei vom Centrum gleich weit entfernten Punkten p und p' trage man diese Lasten nach einem passenden Maasstabe auf. Es ist vielleicht am bequemsten, die Momentenflächen in Dreiecke gleichen Flächeninhalts zu verwandeln, deren jedes die Hälfte der Spannweite zur Grundlinie hat: dann sind die Höhen der Dreiecke die Lasten. Dieses haben wir gethan, so dass $pp_1 = \frac{4}{3}c_0c_3$, und $p'p_1' = \frac{4}{3}c_0'c_3'$ ist. Nun nehme man für den Augenblick an, dass die gesuchte Schlusslinie b_6b_6' sei, was natürlich unrichtig ist, und mache $p_1p_2 = b_6c_6$ und $p_1'p_2' = b_6'c_6'$, so sind dieses die Lasten, welche den positiven dreieckigen Flächen rechts und links respective zukommen, während pp_1 und $p'p_1'$ die negativen parabolischen Lasten sind.

Wir nehmen nun o' als den Pol dieser Lasten an; dann kann pp

für die erste Seite des zweiten Seilpolygons genommen werden. Zieht man pq parallel $o'p_1$ und $p'q'$ parallel $o'p_1'$, und weiter Parallelen zu den Linien $o'p_2$, resp. $o'p_2'$ von q und q', so mögen sich diese letzten Seiten in q_2 schneiden. In der Verticalen durch q_2 liegt dann der Schwerpunkt der Momentenflächen, wenn $b_6 b_6'$ die Schlusslinie ist.

Wenige Versuche werden es uns ermöglichen, die Lage der Schlusslinie zu finden, welche den Schwerpunkt in die mittlere Verticale bringt. Wir sind aber im Stande, diese Versuche so anzustellen, dass sie sogleich die verlangte Schlusslinie ergeben. Da augenscheinlich $b_6 c_6 + b_6' c_6' = h_6 c_6 + h_6' c_6'$, so sieht man, dass die Summe der positiven Lasten constant ist. Deshalb mache man $p_2 p_3 = p_2' p_3'$ und gebrauche $p_1 p_3$ und $p_1' p_3'$ als die positiven Lasten in der gleichen Weise, wie wir $p_1 p_2$ und $p_1' p_2'$ schon früher gebrauchten.

Dieses wird gleichbedeutend sein mit der Annahme einer neuen Lage der Schlusslinie. Die einzige Aenderung im zweiten Seilpolygon wird in der Lage der zwei letzten Seiten sein. Diese müssen jetzt parallel zu $o'p_3$ und $o'p_3'$ respective gezogen werden und mögen sich in q_3 schneiden. Die Verticale durch q_3 enthält dann den Schwerpunkt für diese angenommene Schlusslinie. Ein weiterer Versuch gibt uns q_4.

Hätte sich nun die Richtung der Schlusslinie allmählig verändert, so würde der Schnittpunkt der letzten Seiten des zweiten Seilpolygons eine Curve durch q_2, q_3 und q_4 beschrieben haben. Wenn einer dieser Punkte, wie q_3, der centralen Senkrechten nahe liegt, so wird der Bogen eines Kreises $q_2 q_3 q_4$ sie bei q_5 schneiden, fast gerade in dem Punkte, wo der wahre Ort der Schnittpunkte die mittlere Verticale schneiden würde.

Nehmen wir an, dass q_5 durch den Kreisbogen $q_2 q_3 q_4$ mit hinreichender Genauigkeit bestimmt sei, und ziehen wir qq_5 und $q'q_5$ als die zwei letzten Seiten des Seilpolygons. Nun ziehe man $o'p_5$ parallel qq_5 und $o'p_5'$ parallel $q'q_5$; dann sind $p_1 p_5 = c_6 h_6$ und $p_1' p_5' = c_6' h_6'$ die erforderlichen positiven Lasten, und $h_6 b h_6'$ ist diejenige Lage der Schlusslinie, welche bewirkt, dass der Schwerpunkt der Momentenflächen in die mittlere Verticale fällt.

Es ist offenbar, dass die Schlusslinie des Polygons d, wenn man dies selbst als ein Seilpolygon betrachtet, die horizontale Linie durch d ist, denn diese wird verursachen, dass der Schwerpunkt der Momentenflächen, auf der Linken und auf der Rechten, zwischen ihr und dem Polygon d, auf die mittlere Verticale fällt.

Der nächste Schritt in der Construction ist der, dass wir Satz IV für die Bestimmung der Biegungsmomente anwenden.

Dass Satz IV wahr ist für einen derartigen Bogen, ist **klar**; denn die Belastung verursacht Biegungsmomente proportional **mit den** Ordinaten h_2c_2, h_3c_3 u. s. w., während der Bogen selbst in **Folge** seiner Gestalt Momente, die proportional mit k_2d_2, k_3d_3 u. s. w. **sind**, vernichten kann. Die Unterschiede der durch diese Ordinaten dargestellten Momente sind es, die in Wirklichkeit die Biegung im Bogen hervorbringen.

Die Ordinaten von der Art hc werden nun nicht mit demselben Maasstabe wie die von der Art kd gemessen, denn jedes Polygon wurde ohne Rücksicht auf das andere angenommen. Um das Verhältniss zu finden, in welchem die Ordinaten hc geändert werden müssen, um als mit demselben Maasstabe wie die kd aufgetragen zu erscheinen, ist es nothwendig, eine andere Bedingungsgleichung zu gebrauchen, die durch das Wesen des Gelenkes und die Art der Unterstützung auferlegt wird, nämlich die:

$$\Sigma_{b_6}^{a}(M_a - M_c)\, y = \Sigma_{b_6'}^{a}(M_a - M_c)\, y,$$

oder

$$\Sigma_{b_6}^{d}(M_d - M_c)\, y = \Sigma_{b_6'}^{d}(M_d - M_c)\, y.$$

Die linke Seite ist die horizontale Ausweichung (d. h. die Totaleinsenkung) des Endes a der linken Bogenhälfte, herrührend von den wirklichen Biegungsmomenten $(M_d - M_c)$, die darauf wirken. Die rechte Seite ist die horizontale Ausweichung von a, dem Ende der rechten Bogenhälfte, von den Momenten herrührend, die sie wirklich biegen. Diese sind gleich, weil die beiden Enden durch das Gelenk verbunden sind.

Die Construction der diesen Momenten zukommenden Einsenkungscurven wird uns in Stand setzen, das gewünschte Verhältniss zu finden.

Die Ordinaten kd und hc sind wohl zu lang, um passend zur Bestimmung der Intensität der bei d_1, d_2 u. s. w. und c_1, c_2 u. s. w. concentrirten Momente verwandt werden zu können; daher wollen wir die Hälfte dieser Grössen statt derselben benutzen. Man trage also auf: $dm_6 = \frac{1}{4} k_6 b_6$, $m_6 m_5 = \frac{1}{2} k_5 d_5$, $m_5 m_4 = \frac{1}{2} k_4 d_4$ u. s. w., und ebenso $dn_6 = \frac{1}{4} h_6 c_6$, $n_6 n_5 = \frac{1}{2} h_5 c_5$ u. s. w.

Wir gebrauchen blos ein Viertel jeder Endordinate, weil die Momentenfläche, welche an jedem Ende concentrirt gedacht wird, nur die Hälfte der Breite der Momentenflächen hat, die an den übrigen Theilungspunkten concentrirt sind.

Indem wir b als Pol gebrauchen, finden wir die Einsenkungscurve fb, welche von dem Momente M_a oder M_d, und die Einsenkungscurve

gb, die von den Momenten M_c zur Linken herrührt. Zur Rechten sollten wir eine Einsenkung $df' = df$ finden, die nicht gezeichnet ist, und ähnlich eine Einsenkung dg', die nicht gleich dg ist.

Nun verlangt die Gleichung, die wir gebrauchen, dass die Ordinaten hc so verlängert werden, dass, wenn sie als Gewichte angesehen werden, die Einsenkungen identisch sind, d. h. wir müssen $df = \frac{1}{2}gg'$ haben. Um diese Verlängerung zu Stande zu bringen, mache man $aj = df$ und $ai = \frac{1}{2}gg'$, und ziehe in irgend einer passenden Entfernung auf den Horizontalen ii_0 und jj_0 die Verticale i_0j_0; dann werden die Linien ai_0 und aj_0 die verlangte Verlängerung bewirken. Man trage z. B. auf: $ai_6 = h_6c_6$, womit wir erhalten $aj_6 = k_6e_6$ für die linke Endordinate, und ähnlich $aj_6' = k_6'e_6'$.

Die Poldistanz tt' des ursprünglichen Polygons c muss in demselben Verhältnisse verkürzt werden, in dem die Ordinaten verlängert sind. Daher ist tt_2 die neue Poldistanz des Polygons e.

Da k_6k_6' die Schlusslinie des Polygons e und horizontal ist, so ist o, auf der Horizontalen durch h_6, der Pol von e, denn h_6w_6 ist der durch das linke Auflager getragene Theil des einwirkenden Gewichts.

Wenn nun die Gewichtslinie nach t_2 hinaufgerückt wird, so dass die einwirkenden Gewichte sind: u_1u_1' am Centrum u. s. w., und o der Pol ist, so kann das Polygon e von d ausgehend gezogen werden und wird zuletzt die zuvor erhaltenen Endordinaten k_6e_6 und $k_6'e_6'$ abschneiden. Dann werden die Ordinaten von der Art von de proportional sein zu den den Bogen wirklich biegenden Momenten, und die Momente werden den Producten von de mit tt_2 gleich sein, wobei de nach dem Maasstabe der Längen und tt_2 nach dem, für die Gewichte w_1w_2 u. s. w. angenommenen, Maasstabe gemessen ist.

Die Genauigkeit der Construction wird schliesslich erprobt, indem man $\Sigma(ds)^2 = 0$ nimmt, welche Gleichung aus $\Sigma''(M_d - M_c)y = 0$ hergeleitet wird, wie im vorhergehenden Kapitel über die St. Louiser Brücke gezeigt wurde. Es ist unnöthig, die Einzelnheiten dieser Construction zu erklären, da sie, wie aus Fig. 3 erhellt, in jeder Hinsicht der in Fig. 2 gleich ist.

Wir wollen nun die Grösse der Tangentialcompression längs des Bogens und die zum Bogen normale Scheerkraft aufsuchen. Da die Poldistanz tt_2 sich auf den Unterschied der Ordinaten der Polygone d und e bezieht, deren Ordinaten das Zweifache der wirklichen Ordinaten sind, so müssen wir, wenn wir jetzt zu dem wirklichen Bogen zurückkehren wollen, dessen Ordinaten die Hälften der Ordinaten von d sind, eine Poldistanz $tt_3 = 2tt_2$ nehmen und die Gewichtlinie so verrücken,

dass sie in der Verticale durch t_3 liegt. Dann ist tt_3 der wirkliche durch die Gewichte hervorgerufene Horizontalschub dieses Bogens, und ov_6 ist der resultirende Druck in dem Segmente $a_5 b_6$ des Bogens, welcher in zwei Componenten or_6 und $v_6 r_6$ respective parallel und senkrecht zu $a_5 b_6$ zerlegt werden kann.

Die Linien or_6 und $v_6 r_6$ stellen dann resp. den Schub längs des Bogens und die Scheerkraft senkrecht zum Bogensegment $a_5 b_6$ vor. Aehnlich sind or_5 und $v_5 r_5$ der tangentiale Schub und die normale Scheerkraft beim Segment $a_5 a_4$, u. s. f. für die andern Segmente. Diese Grössen sind alle nach demselben Maasstabe wie die einwirkenden Gewichte gemessen.

Die Scheerkraft ändert zweimal ihr Vorzeichen, wie ein Blick auf die Richtungen lehren wird, in denen die Grössen vom Typus vr gezogen sind. Die Scheerkraft ist Null, wo immer die Curven d und e parallel zu einander sind. So ist die Scheerkraft nahezu Null bei b_6, bei a_2 und an einem gewissen Punkte zwischen a_2' und a_3'.

Die Maximal- und Minimalscheerkräfte finden sich da, wo die Neigung zwischen den Tangenten an die Curven d und e am grössten ist.

Die im vorhergehenden Kapitel gemachten Angaben betreffs der Lage der beweglichen Last, die die grössten Biegungsmomente hervorbringt, sind auch auf Bogen dieser Art anwendbar.

Die normale Scheerkraft wird für die Theile des Bogens nahe dem Centrum dann ein Maximum haben, wenn die bewegliche Last nahe ihrer gegenwärtig angenommenen Lage ist und die Hälfte des Bogens bedeckt. Aber die normale Scheerkraft wird nahe den Enden ihren grössten Werth erreichen, wenn der Bogen gänzlich von der beweglichen Last bedeckt ist, oder auch wenn die bewegliche Last ihrer gegenwärtigen Lage nahe ist, da sie von dem Pfeile des Bogens und dem Verhältnisse zwischen der sich bewegenden und der ständigen Last abhängt.

Die maximalen Tangentialcompressionen kommen vor, wenn die bewegliche Last den ganzen Bogen bedeckt.

Die durch die obigen Constructionen erhaltenen Spannungen beruhen auf der Annahme, dass der Bogen einen constanten Querschnitt hat, so dass sein Trägheitsmoment nicht wechselt und keine Rücksicht genommen ist auf die durch Aenderungen in der Länge des Bogens in Folge von Temperaturänderungen oder anderen Ursachen herbeigeführten Spannungen. Diese letzteren Spannungen werden wir jetzt für beide Arten von Bogen, die wir behandelt haben, untersuchen.

Viertes Kapitel.

Die Folgen der Temperaturänderung.

Man kann passend alle Arten von Spannungen, die von einer Aenderung in der Länge des Bogens herrühren, als die Folgen von Temperaturänderungen betrachten, da sie offenbar durch geeignete Temperaturänderungen herbeigeführt werden können.

Die Spannungen dieser Art, die wegen ihrer Grösse Beachtung verdienen, sind ausser den Folgen des Temperaturwechsels zweierlei: die elastische Verkürzung des Bogens unter der Zusammendrückung, welcher er unterworfen wird, und das Ausweichen der Widerlager unter dem Horizontalschube, den der Bogen auf sie ausübt, mag er elastisch sein oder nicht. Wie wir glauben, wurde dieser Punkt bei der Berechnung der St. Louiser Brücke ganz ausser Acht gelassen, und zwar mit gutem Grunde, da die anderen Spannungen dieser Art mit genügender Zugabe in Rechnung gestellt wurden, um auch jene zu decken. Alles, was die wahre Spannweite des Bogens von der wirklichen Spannweite verschieden macht, verursacht Spannungen dieser Art. Unter wahrer Spannweite verstehen wir die Spannweite, welche der Bogen haben würde, wenn er auf einer ebenen Fläche in solcher Lage flach auf die Seite gelegt wäre, dass nirgends an ihm Spannungen wären, während die wirkliche Spannweite die Entfernung zwischen den Pfeilern ist, wenn der Bogen an seiner Stelle steht. Wenn der Bogen an seiner Stelle gebaut, aber in der unrechten Temperatur zusammengefügt wird, so stimmen die wahre und die wirkliche Spannweite nicht überein und übermässige Spannungen werden vom Temperaturwechsel herbeigeführt.

Wenn wir den Ausdehnungscoefficienten des Stahls nehmen, wie er gewöhnlich angegeben wird, so würde ein Wechsel von $\pm$ 80^0 F. von der mittleren Temperatur die Spannweite der St. Louiser Brücke um $3\frac{1}{4}$ Zoll grösser oder geringer machen, als sie bei mittlerer Temperatur ist.

Die Aufgabe, welche wir zu lösen wünschen, ist somit sehr annähernd diese: Wie gross muss der Horizontalschub sein, der im Stande ist, die Spannweite dieser Brücke um $3\frac{1}{4}$ Zoll zu vermehren oder zu vermindern, und welche Spannungen werden durch diesen Schub herbeigeführt?

In Fig. 4 [Taf. III] ist die halbe Spannweite im anderthalbfachen Maassstabe der Fig. 2 dargestellt. Die einzigen auf den halben Bogen einwirkenden Kräfte sind: ein unbekannter Horizontalschub H bei

b_8 und ein gleicher Gegendruck H bei a. Der Bogen ist in gleicher Lage, wie er sein würde, wenn Fig. 4 die Hälfte eines gothischen Bogens von einer Spannweite $= 2ab$ wäre, dessen eines Widerlager a und dessen neuer Scheitel, auf den ein Gewicht von $2H$ einwirkte, b_8 ist. Der gothische Bogen würde im Scheitel fest zusammenhängend sein, aber das Widerlager a wäre auf Rollen gestellt, so dass, obgleich die Richtung einer Tangente bei a nicht verändert werden könnte, nichtsdestoweniger das Widerlager keinen Widerstand leisten könnte, um die Enden zu verhindern auseinander zu gehen, d. h. es gibt keinen Schub in der Richtung von ab, ebensowenig als es einen gibt längs eines gewöhnlichen geraden Trägers.

Um die genaue Construction zu erleichtern, wollen wir die Ordinaten von a mit 3 multipliciren und ihm das Polygon d substituiren. Nun ist das wirkliche Seilpolygon der einwirkenden Kräfte H die gerade Linie kk_8. Unter dem wirklichen Seilpolygon wird dasjenige verstanden, welches den wirklichen Schub des Bogens zur Poldistanz hat. Da wir jetzt diesen Bogen betrachten, ist H die einwirkende Kraft und der erwähnte Schub rechtwinklig zu H. Wir haben eben gezeigt, dass dieser Schub Null ist. Somit müssen wir für die einwirkende Kraft H ein Seilpolygon mit der Poldistanz Null construiren. Das Polygon erstreckt sich ins Unendliche in der Richtung von H und ist daher eine mit H parallele Linie. Somit ist ihre Richtung gegeben.

Ihre Lage ist festgesetzt durch die Erwägung, dass die Gesammtbiegung Null ist (weil die Richtung der Tangenten an den Enden a und b_8 unverändert ist), was durch die Gleichung

$$\Sigma(M_d) = 0$$

ausgedrückt wird.

Dieses gibt uns dieselbe Schlusslinie durch k, welche wir in Fig. 2 fanden, und die Ordinaten von der Art kd sind zu den durch den Horizontalschub H verursachten Momenten proportional.

Nun trage man auf: $dm_8 = \frac{1}{2}k_8b_8$, $m_8m_7 = k_7d_7$, u. s. w., wie in Fig. 2. Dann können wir das Problem der Bestimmung von H in zwei Schritten lösen.

1) Wir werden die wirklichen Werthe der Momente suchen, zu welchen die Ordinaten kd proportional sind.

2) Wir werden H finden, indem wir eines dieser Momente durch seinen Arm dividiren.

Indem wir die in Kapitel I gegebene Gleichung

$$D_y EI = \Sigma(My)$$

betrachten, in welcher D_y die horizontale Ausweichung ist, sehen wir, dass, wenn die wirklichen Momente als Gewichte verwendet werden, und EI als die Poldistanz, wir als das zweite Seilpolygon eine Einsenkungscurve erhalten werden, dessen Ordinaten die wirklichen Einsenkungen sind, die von den Momenten herrühren. Unter wirklichen Momenten, wirklichen Einsenkungen u. s. w. wird verstanden, dass alle Grössen in der Gleichung nach dem Längenmaassstabe aufgetragen werden, also in ein n^{tel} der wirklichen Grösse.

Somit werde die Gleichung geschrieben

$$nD_y \cdot \frac{1}{n}EI = \Sigma(My),$$

woraus ersichtlich ist, dass, wenn die Ordinaten mit n multiplicirt werden, sodass sie auf dem Papier dieselbe Grösse haben wie im Bogen, wir ein n^{tel} der früheren Poldistanz brauchen müssen, während Alles sonst unverändert bleibt.

Nun ist für die St. Louiser Brücke $EI = 39680000$ Fusstonnen. Nehmen wir 100 Tonnen = einen Zoll als den Kraftmaassstab an, so ergibt sich $bd = 4\frac{1}{2}$ Zoll, der Längenmaassstab n der Distanz aus der Proportion $4\frac{1}{2}$ Zoll : 51.8 Fuss $= 1 : n = 140$ nahezu,

und $EI : 100n^2 = 20$ Zoll nahezu,

welches die Poldistanz ist, die bei der wirklichen Einsenkung = der Hälfte von $3\frac{1}{4}$ Zoll $= 1\frac{5}{8}$ Zoll gebraucht werden muss, damit die Momente nach dem Maassstabe gemessen werden können. Da es unbequem wäre, eine so grosse Distanz wie 20 Zoll auf unserem Papier zu benutzen, so wollen wir $\frac{1}{4}$ von 20 Zoll = 5 Zoll $= dz$ als Poldistanz nehmen und $4 \times 1\frac{5}{8}$ Zoll $= 6\frac{1}{2}$ Zoll $= dy$ für die Einsenkung nehmen.

Die Momente, welche die Producte der Einsenkungen mit der Poldistanz sind, werden durch dieses Verfahren unverändert bleiben.

Nun ziehe man mit z als Pol und den Gewichten dm_8, m_8m_7, u. s. w., die Einsenkungscurve bf, welche die Einsenkung $= df$ hat. Die Momente M_d müssen in einem solchen Verhältnisse vergrössert werden, dass die Einsenkung von df zu dy vergrössert wird. Deshalb ziehen wir die geraden Linien bf und by, welche uns in den Stand setzen werden, die Verlängerung in dem verlangten Verhältnisse zu bewirken. Z. B. wird das Moment $dm_1 = bi$ zu bj und $dm_8 = bi_8$ zu bj_8 verlängert. Indem wir nun bj nach Zoll massen und mit 140 und 100 multiplicirten, fanden wir $14000\,bj = 1809$ Fusstonnen = dem Moment bei d oder a.

Ebenso, $14000\,bj_8 = 3747$ Fusstonnen = dem Moment bei b_8.

Durch Messung ergab sich weiter $140 dk = 17$ Fuss und $140 bk = 34.8$ Fuss. Daraus folgt

$$H = 1809 : 17 = 106 \text{ Tonnen}, +$$

oder

$$H = 3747 : 34.8 = 108 \text{ Tonnen } -.$$

Diese Resultate sollten identisch sein, und der Unterschied zwischen ihnen, der nicht ganz 2 % beträgt, rührt von dem Fehler her, den wir begingen, indem wir das Polygon d statt der Curve der Ellipse gebrauchten, und von kleinen Irrthümern im Messen. Durch Benutzung einer grösseren Figur und durch Eintheilung der Spannweite in mehr Theile könnte dieser Fehler verringert werden. Der Werth von H, der bei der St. Louiser Brücke durch Berechnung gefunden wurde, war 104 Tonnen, aber dabei war das Trägheitsmoment I nicht constant angenommen und deswegen musste der Werth kleiner sein als der den wir erhielten.

Nun ist dieser horizontale Schub H, der von Temperaturwechsel und beliebigen anderen Schüben ähnlicher Art, wie z. B. Zusammendrückung u. s. w. herrührt, seiner Natur nach eine Correction des von den einwirkenden Gewichten herrührenden Schubes. So fanden wir in Fig. 2, dass $3ov'$ der von den einwirkenden Gewichten herrührende Schub ist, und indem wir die Correction anwenden, müssen wir die zwei Schübe $3ov' + H$ und $3ov' - H$ als Poldistanzen gebrauchen, um Seilpolygone zu erhalten, deren Ordinaten vom Bogen a ausgerechnet, und mit dessen Poldistanz multiplicirt, die wahren Biegungsmomente geben. Die Tangential- und Normalspannungen können dann genau wie in Fig. 3 durch Zerlegung bestimmt werden.

Wenn es jedoch wünschenswerth erscheint, die von H herrührenden Spannungen separat zu berechnen, so lässt sich das leichter thun, als in Verbindung mit den bereits erhaltenen Spannungen. Wir haben bereits zur Genüge gesehen, wie die H zukommenden Momente gefunden werden. In der That sind es dieselben, wie sie hervorgebracht würden, wenn H an dem Punkte wirkte, wo die Horizontale durch k das Polygon d schneidet; denn dieses ist der Punkt mit dem Moment Null und kann für den Augenblick als ein freies Ende jedes Segmentes betrachtet werden, auf welches H einwirkt und die seinem Arme und seiner Intensität zukommenden Momente erzeugt.

Um die Tangentialspannung und die Scheerkraft zu finden, trage man in Fig. 4 $av = H$ auf, beschreibe darüber, als über einem Durchmesser, einen Halbkreis und ziehe av_8 parallel $a_7 a_8$, av_7 parallel $a_6 a_7$ u. s. w.; dann wird av_8 die Componente von H längs $a_7 a_8$ und vv_8

die Componente von H senkrecht zu diesem Segment sein. In ähnlicher Weise sind die Grössen von der Art von av die Tangentialspannungen, die Grössen vv die Scheerkräfte, welche durch H hervorgebracht werden.

Der für diese letzte Construction gebrauchte Maassstab ist ungefähr $33\frac{1}{3}$ Tonnen = 1 Zoll.

Nun ist H positiv oder negativ, je nachdem die Temperatur über die mittlere steigt, oder unter sie fällt, und diese Tangential- und Normalcomponenten ändern natürlich ihr Vorzeichen mit H.

Es muss auch bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass Schübe und Biegungsmomente, die numerisch gleich, aber entgegengesetzten Vorzeichens sind, durch gleiche Zusammenziehungen und Ausdehnungen veranlasst werden.

In Fig. 5 sind die vom Temperaturwechsel herrührenden Spannungen im Bogen Fig. 3, der ein Gelenk in der Mitte hat, construirt.

Aus ähnlichen Schlussfolgerungen, wie die im eben besprochenen Falle angewandten, erhellt, dass die Schlusslinie dk_6 des Polygons d das Seilpolygon des vom Temperaturwechsel veranlassten Schubes H ist. Wenn man die Gleichung, welche die Einsenkungen liefert, in die Form bringt:

$$mD_y \cdot \frac{EI}{mn^2} = \sum\left(\frac{M}{n} \cdot \frac{y}{n}\right),$$

so sind, wenn $mD_y = dy$ und $EI : mn^2 = dz$, die Momente M und die Ordinaten y nach dem Maassstabe von $1 : n$ aufzutragen. Dies läuft auf dasselbe hinaus, was wir im vorhergehenden Falle thaten, wo $m = 4$ war. Das übrige Verfahren ist das früher angewandte.

Es verdient bemerkt zu werden, dass wir in Fig. 4 [Taf. III] und Fig. 5 [Taf. IV] beiläufig zwei neue Formen des Bogens erörterten, nämlich in Fig. 4 die eines Bogens, dessen Enden der Richtung nach, nicht aber der Lage nach, fixirt sind: d. h. sie können gleiten, aber sich nicht drehen; und in Fig. 5 die eines Bogens, der an den Enden sich ungehindert verschiebt und dreht. Der erste dieser Bögen hat dieselben Biegungsmomente, wie ein gerader Träger, der an den Enden der Richtung nach fest ist, und der zweite hat dieselben Biegungsmomente, wie ein einfacher, an den Enden unterstützter Träger.

Unsymmetrische Bögen.

Die Constructionen, welche wir gegeben haben, sind durch die Symmetrie der rechten und linken Bogenhälften etwas vereinfacht worden; aber die angewandten Methoden sind ebensogut brauchbar, wenn

solche Symmetrie nicht besteht, wie dieses z. B. der Fall ist, wenn die Widerlager von ungleicher Höhe sind.

Insbesondere ist, für den unsymmetrischen Bogen, die Schlusslinie im Allgemeinen nicht horizontal und muss genau so gefunden werden, wie die des Seilpolygons der einwirkenden Gewichte.

Wenn in Fig. 3 das Gelenk nicht im Centrum liegt, so ist der Bogen unsymmetrisch und die Bestimmung der den einwirkenden Gewichten zukommenden Schlusslinie nicht ganz so einfach wie in Fig. 3. Es wird nöthig sein, durch das Gelenk die Versuchslinien zu ziehen, durch welche die Fehlercurve q gefunden wird.

Fünftes Kapitel.

Elastischer Bogen mit Endgelenken.

Es habe die Curve a des zu besprechenden Bogens eine Spannweite 6mal so gross als ihre Pfeilhöhe, wie in Fig. 6 [Taf. V] dargestellt. Man theile die Spannweite in zwölf gleiche Theile und mache die Ordinaten vom Typus bd zweimal so gross als die Ordinaten ab.

Eine gleichförmige Belastung mit der Höhe xy bedecke die zwei Drittel der Spannweite zur Linken und eine gleichförmige Ladung von der Höhe $xy' = \frac{1}{2}xy$ bedecke das Drittel der Spannweite zur Rechten. Man nehme z. B. ein Drittel der Spannweite als Poldistanz an und trage auf: $b_4 w_1 = xy =$ der Hälfte der im Centrum concentrirt gedachten Last; $w_1 w_2 = 2xy =$ der oberhalb b_1 concentrirten Last u. s. w. Aehnlich mache man zur Linken $b_4' w_1' = xy =$ der Hälfte der Last über b; $w_1' w_2' = 2xy =$ der Last über b_1'; $w_2' w_3' = xy + xy' = \frac{3}{2}xy =$ der Last über b_2'; $w_3' w_4' = xy =$ der Last über b_3' u. s. w.

Zu diesem Kräftepolygon ziehe man das Seilpolygon c gerade wie in Fig. 2 und Fig. 3.

Nun muss die Schlusslinie eines Seilpolygons für einen geraden Träger, dessen Enden sich frei drehen können, offenbar so laufen, dass die Endmomente verschwinden. Daher ist $c_6 c_6'$ die Schlusslinie des Polygons c und $b_6 b_6'$ die Schlusslinie des Polygons d, nach demselben Gesetze gezogen. Die noch übrige Bedingung zur Bestimmung des Horizontalschubes ist:

$$\Sigma[(M_d - M_c)y] = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma(M_d y) = \Sigma(M_c y),$$

welche Gleichung die Bedingung ausdrückt, dass die Spannweite unveränderlich sei, indem die Summation von einem Ende zum andern des Bogens ausgedehnt ist.

Die Summation wird ausgeführt wie in Fig. 2 und Fig. 3, indem man Grössen proportional zu den an den Theilungspunkten des Bogens concentrirten Momenten der wirkenden Kräfte als Lasten aufträgt und so das zweite Seilpolygon construirt, oder das Einsenkungspolygon zweier aufrechten Träger, die durch diese Momente gebogen werden.

Nehmen wir $\frac{1}{4}$ jeder der Ordinaten bd für diese Lasten, d. h. $bm = \frac{1}{4}$ von $\frac{1}{2}bd$; $mm_1 = \frac{1}{4}b_1d_1$ u. s. w., ebenso bn, nn_1, u. s. w. gleich ähnlichen Bruchtheilen der Ordinaten der Curve c. Indem wir d als Pol für diese Belastung annehmen, erhalten wir die Totaleinsenkung bf_6 zur Linken und zur Rechten (nicht gezeichnet), welche von den Momenten M_d herrührt.

Aehnlich ist g_6g_6' die Totaleinsenkung zur Rechten und zur Linken, welche die Momente M_c hervorbringen.

Nun verlangt die Bedingungsgleichung, dass $\frac{1}{2}g_6g_6' = bf_6$. Um dies zu Stande zu bringen, müssen die Ordinaten des Polygons c in dem Verhältnisse dieser Einsenkungen verlängert werden. Zu dem Zwecke mache man $ai = \frac{1}{2}g_6g_6'$ und $aj = bf_6$ und ziehe auf die Horizontalen durch i und j in passender Entfernung die Senkrechte i_0j_0; dann werden die Linien ai_0 und aj_0 die gewünschte Verlängerung liefern, wie vorher erklärt. Um die mittlere Ordinate be z. B. zu erhalten, mache man $ai' = bh$, dann ist $aj' = be$. Um den neuen Pol o zu finden, ziehe man bv parallel mit c_6c_6' und vo horizontal, wie früher erklärt wurde.

Wenn ai_0 die Lastlinie bei t_1, und die Horizontale durch t_1 die Linie aj_0 bei t_2 schneidet, so ist die Verticale durch t_2 die neue Lage der Lastlinie und tt_2 ist der neue Horizontalschub.

Indem man nun o als den Pol der Lastlinie u_1u_1' u. s. w. benutzt, ziehe man durch t_2 das Seilpolygon, bei e anfangend. Es muss durch b_6 und b_6' gehen, was eine Probe für die Genauigkeit der Construction ist.

Die Construction kann nun vollendet werden, gerade wie in Fig. 3, indem man die Poldistanz verdoppelt und die Tangentialspannung längs des Bogens sowie die Scheerkraft normal zum Bogen in den Segmenten sucht, in die er getheilt ist. Das Maximum des Schubes und der Tangentialspannung wird erhalten, wenn die bezügliche Last die ganze Spannweite bedeckt.

Um die Wirkungen des Temperaturwechsels und anderer Ursachen ähnlicher Natur, welche Schub, Scheerkräfte, Biegungsmomente u. s. w. hervorbringen, zu berechnen, wollen wir die Einsenkungsgleichung in der folgenden Form schreiben

$$mD_y \cdot \frac{EI}{mn^2n'} = \sum\left(\frac{M}{nn'} \cdot \frac{y}{n}\right). \qquad \text{(D)}$$

Diese Gleichung macht vielleicht das bei den Figuren 4 und 5 befolgte Verfahren verständlicher und ist die Gleichung, die als Grundlage für die Erörterungen der Folgen des Temperaturwechsels im Bogen dienen sollte. In Gleichung (D) ist n die Zahl, mit welcher die Pfeilhöhe des Bogens getheilt werden muss, um sie auf bd zu reduciren, d. h. es ist der Maassstab der verticalen Ordinaten nach der Art von bd in Fig. 6, sodass, wenn bd denselben Maassstab hätte, wie der Bogen selbst, $n = 1$ wäre. Ferner ist n' der Maassstab der Kraft, d. h. die Zahl der Tonnen, die durch einen Zoll dargestellt werden, und m ist eine der Bequemlichkeit wegen eingeführte Zahl, sodass irgend eine angenommene Poldistanz p als Poldistanz für das zweite Seilpolygon dienen kann. In Fig. 6 ist $p = bd$.

Die Gleichung

$$p = \frac{EI}{mn^2n'} \quad \text{liefert} \quad m = \frac{EI}{pn^2n'},$$

woraus sich m berechnen lässt, denn EI ist eine bekannte Anzahl von Fusstonnen, wenn der Querschnitt des Bogens gegeben ist, p eine Zahl von Zollen, die in der Zeichnung angenommen ist, n und n' sind ebenfalls angenommene Zahlen. Nun ist D_y die Zahl der Zolle, um die die Spannweite durch den Temperaturwechsel verlängert oder verkürzt wird, und daher wird mD_y sogleich in der Zeichnung aufgetragen.

Die Grössen in Gleichung (D) stehen in solcher Beziehung zu einander, dass die linke Seite das Product der Poldistanz und der Ordinate des zweiten Seilpolygons ist, während die rechte Seite das von der Belastung $M:nn'$, die zu M proportional ist, hervorgebrachte Biegungsmoment ist. Die Curve f wurde mit dieser Belastung construirt und wir brauchen nur ihre Lasten und Ordinaten im Verhältnisse von bf_6 zu $\frac{1}{2}mD_y$ zu verlängern, um die Werthe von $M:nn'$ an den verschiedenen Theilungspunkten des Bogens zu bestimmen. Die Hälfte jeder Grösse ist genommen, weil wir blos die Hälfte des Bogens in dieser Rechnung zu gebrauchen haben. Zwei wie in den Figuren 4 und 5 gezogene Linien bewirken die erforderliche Verlängerung.

Die obige Erörterung beruht auf der Annahme, dass der durch den Temperaturwechsel veranlasste Horizontalschub in der Schlusslinie bb_6 des Bogens wirkt, was aus früheren Erörterungen so klar ist, dass es hier keines Beweises bedarf.

Die durch das vorhergehende Verfahren bestimmte Grösse $M:nn'$ ist $= q =$ einer bestimmten Anzahl von Zollen. Dann ist $M = nn'q$

und $H = M:y = n'q:\frac{y}{n}$, worin $\frac{y}{n}$ auf der Zeichnung die Länge der Ordinate in Zollen ist, an dem Punkte wo M einwirkt.

Die Bestimmung der Scheerkraft und der Tangentialspannung, wie solche durch H verursacht werden, wird erreicht, indem man H als den Durchmesser eines Kreises benutzt, in welchem Dreiecke eingeschrieben sind, deren Seiten beziehungsweise parallel und senkrecht zu den Segmenten des Bogens sind, genau wie in den Figuren 4 und 5 geschah.

Die ganze Untersuchung des Bogens mit Endgelenken kann auch auf einen unsymmetrischen Bogen mit Endgelenken angewendet werden. In diesem Falle würde es nothwendig sein, die Curve f' zur Rechten, sowie auch f zur Linken zu ziehen, und die beiden würden, wie g und g', sich nicht ähnlich sein. Dieses würde jedoch bei der Bestimmung der Spannungen keine Schwierigkeiten bereiten, weder der von den Lasten, noch der vom Temperaturwechsel herrührenden.

Wenn die bewegliche Last über zwei Drittel der Spannweite einnimmt, wie in Fig. 6, so ist das Maximalbiegungsmoment beinahe in der Mitte jener beweglichen Last und sehr annähernd das grösste, das durch eine bewegliche Last von solcher Intensität hervorgebracht werden kann; während das grösste Moment mit entgegengesetztem Vorzeichen nahe der Mitte des unbelasteten Drittels der Spannweite gefunden wird.

Wenn die Curve des Bogens eine Parabel anstatt ein Kreissegment wäre, so würden diese Angaben genau und nicht nur annähernd richtig sein, was analytisch bewiesen werden kann. Dieser Gegenstand wird in der Folge weiter besprochen werden.

Sechstes Kapitel.

Bogen mit drei Gelenken.

Wir nehmen an, die Gelenke lägen im Mittelpunkte und an den Enden des Bogens, wie aus Fig. 7 [Taf. V] ersichtlich ist. Dann möge die Belastung und die Gestalt des Bogens dieselbe sein, wie in Fig. 6. Da nun die Biegungsmomente an jedem der Gelenke verschwinden müssen, so muss die wahre Seilcurve durch jedes der Gelenke gehen, d. h. jede Ordinate des Polygons c muss in dem Verhältnisse von db zu bh verlängert werden. Zu dem Zwecke mache man $di' = bh$ und ziehe auf die Horizontalen durch b und i in passender Entfernung die

Verticale $i_0 b_4$. Dann werden uns die Verhältnisslinien di_0 und db_4 in den Stand setzen, die Ordinaten, wie nöthig, zu verlängern, oder die im selben Verhältnisse verminderte neue Poldistanz ti zu finden, indem wir die Horizontale ti durch i_0 ziehen. Der neue Pol o wird auf gleiche Weise wie in Fig. 6 gefunden.

Nun können wir mit dem neuen Pole o und der neuen Lastlinie durch t das Polygon e finden, von d ausgehend. Es muss durch b_6 und b_6' gehen, was eine Probe für die Genauigkeit der Construction ist.

Das Maximum des Schubes und der Tangentialspannung wird erreicht, wenn die Belastung die ganze Spannweite bedeckt.

Verlängerungen und Verkürzungen in Folge des Temperaturwechsels veranlassen in diesem Bogen keine Biegungsmomente; aber es mögen geringe Veränderungen in Schub u. s. w. vorkommen in Folge der Verlängerung oder Verkürzung des Bogens, die durch ein geringes Steigen oder Sinken des Scheitels hervorgebracht werden. Dies ist eine so geringe Formänderung, dass die Berechnung der ihr zukommenden Spannungen ohne Wichtigkeit ist. Wir haben aus demselben Grunde in den früheren und den nachfolgenden Constructionen es unterlassen, die an den verschiedenen Punkten des Bogens durch die Verbiegung verursachten Spannungen zu berechnen; es würde jedoch leicht möglich sein, diese Spannungen durch analoge Methoden vollständig zu untersuchen.

Die oben gegebene Construction ist auf jeden Bogen mit drei Gelenken anwendbar. Der Bogen braucht nicht symmetrisch zu sein und die drei Gelenke können sich ebensowohl an irgend andern Punkten des Bogens befinden, als in den oben gewählten.

Siebentes Kapitel.

Bogen mit einem Endgelenke.

Es sei der Bogen durch Fig. 8 [Taf. V] gegeben, wo die Last u. s. w. die gleiche ist wie in Fig. 6.

Die Schlusslinie muss durch das Gelenk gehen, denn an ihm verschwindet das Biegungsmoment.

Eine zweite zu erfüllende Bedingung ist die, dass die Gesammteinsenkung unter die Tangente an dem festen Ende eines geraden Trägers, der ein Endgelenk hat, verschwindet; denn die Lage des Gelenkes ist fest. Dies ist in der Gleichung

$$\Sigma(Mx) = 0$$

ausgedrückt, worin die Summation von einem Ende zum andern ausgedehnt ist.

Diese Bedingung wird es uns ermöglichen, die Schlusslinien der Polygone c und d zu ziehen. Das Problem kann folgendermassen ausgedrückt werden: In welcher Richtung muss eine Schlusslinie wie $c_6 h'$ von c_6 aus gezogen werden, damit das Moment der negativen dreieckigen Fläche $c_6 c_6' h'$ um c_6 gleich dem Moment der positiven parabolischen Fläche $c_6 b c_6'$ sei?

Um dieses Problem zu lösen, suche man zuerst den Schwerpunkt der parabolischen Fläche, indem man sie in Theile zerlegt.

Die parabolische Fläche $c_6 b c_2'$ ist das Segment einer einzigen Parabel, deren Flächeninhalt $\frac{2}{3} b_6 b_2' \times c_0 c_2 = \frac{1}{2} h_1 \times b_6 b_6'$ ist, wenn $h_1 =$ der Höhe eines Dreiecks von gleichem Inhalt ist, das die Spannweite zur Grundlinie hat, woraus $h_1 = \frac{8}{9} c_0 c_2$.

Man mache $l_6 b_6 = c_0 c_2$, und ziehe $l_6 b_3'$, so wird $b_5 l_5 = h_1$. Dann mache man $c_2' p_1 = h_1$ proportional mit dem Gewichte der parabolischen Fläche. Es ist auch $c_2' p$ proportional mit dem Gewichte des Dreieckes $c_6 c_2' c_6'$. Die parabolische Fläche $c_2' c_6' = \frac{2}{3} c_0' c_4' \times b_2' b_6' = \frac{1}{2} h_2 \times b_6 b_6'$ gesetzt, wie früher, liefert $h_2 = \frac{4}{9} c_0' c_4'$, was, gleichwie früher h_1, gefunden werden kann.

Es sei $h_2 = p p_2$, so ziehen wir, indem wir etwa c_2 zum Pol dieser Lastlinie nehmen, $q q_1$ parallel $c_2 c_2'$; da die linke parabolische Fläche ihren Schwerpunkt in der Verticalen durch q_1 hat, und die dreieckige Fläche in der durch q, so ziehen wir $q q_1'$ parallel $c_2 p$ nach der Verticalen durch q_1', welche den Schwerpunkt der parabolischen Fläche rechts enthält. Der Punkt q, welcher sich in der Mitte zwischen den b und b_2' enthaltenden Verticalen finden sollte, liegt ein wenig zur Rechten von seiner wahren Lage, da er in einem Drittel des Abstands der Verticalen durch b und b_2 sein sollte. Dies beeinflusst jedoch die Natur des Verfahrens nicht. Dann liefern $q_1 q_2$ parallel $c_2 p_1$ und $q_1' q_2$ parallel $c_2 p_2$ den Punkt q_2 in der Verticalen durch den Schwerpunkt der gesammten positiven Fläche. Da die negative Fläche die Form eines Dreieckes hat, so hat sie ihren Schwerpunkt in der Verticalen durch c_2'.

Wenn nun das gesammte positive Biegungsmoment als in seinem Schwerpunkte concentrirt und auf einen geraden Träger wirkend gedacht wird, so wird dieser die Gestalt $r q_2 r_1$ dieses zweiten Seilpolygons annehmen, und wenn ein negatives Moment der Art einwirken muss, dass die Einsenkung verschwindet, so muss der übrige Theil des Trägers $r_1 r_2$ sein, eine Verlängerung von $r r_1$. Nun ziehe man $c_2 p_3$

parallel rr_1, und hat dann $p_2p_3 = c_6'h' =$ der Höhe des Dreiecks der negativen Fläche. Daher ist c_6h' die Schlusslinie, welche die geforderten Bedingungen erfüllt.

Um ferner die Schlusslinie b_6k' nach demselben Gesetze zu ziehen, wissen wir, dass der Schwerpunkt der Polygonfläche d in der mittleren Verticalen liegt. Um die Höhe p_1p' eines gleichwerthigen Dreieckes zu finden, welches eine Grundlinie hat, die der Spannweite gleich ist, können wir ein angenähertes Resultat benutzen, wie bei Fig. 2, indem wir ein Zwölftel der Summe aller Ordinaten vom Typus bd nehmen; aber es ist viel besser, durch die Anwendung der Simpson'schen Regel, welche durch das Verschwinden der Endordinaten vereinfacht wird, ein genaueres Resultat zu erhalten. Die Regel reducirt sich in diesem Falle auf das folgende: Die gesuchte Höhe ist ein Achtzehntel von der Summe der Ordinaten mit geraden Nummern plus einem Neuntel der Summe der übrigen.

Nun gibt dieses in der mittleren Verticalen concentrirte Moment mit einem negativen Moment der Art, dass keine Totaleinsenkung in einem geraden Träger zu Stande kommt, ein zweites Seilpolygon $rq_2'r_1'r_2'$, und wenn c_2p_3' parallel rr_1' ist, so ist $p'p_3' = b_6'k'$ die Höhe der dreieckigen negativen Fläche, und die Schlusslinie ist b_6k'.

Die noch übrige Bedingung ist, dass die Spannweite unveränderlich sei. Sie wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$\Sigma[(M_d - M_c)y] = 0, \quad \text{oder } \Sigma(M_d y) = \Sigma(M_c y).$$

Wir wollen die Einsenkungscurve, welche von den Momenten M_d herrührt, in ähnlicher Weise construiren, wie in Fig. 2. Wir tragen die Grössen dm_5, m_5m_4 u. s. w. auf, gleich einem Viertel der entsprechenden Ordinaten der Curve d, und dn_5, n_5n_4 u. s. w. gleich einem Viertel der Ordinaten der Curve c. Wir nehmen ein Viertel oder einen beliebigen Bruchtheil oder ein beliebiges Vielfaches beider Curven, wie es eben bequem sein mag. Indem wir b als Pol gebrauchen, erhalten wir die Verbiegungscurven f und f' für die zu M_d proportionalen Momente, und die Curven g und g' für die zu M_c proportionalen.

Nun verlangt Satz IV, dass die Ordinaten des Polygons c so verlängert werden, dass gg' gleich ff' wird. Man mache $di = gg'$ und $dj = ff'$ und ziehe, wie zuvor, Verhältnisslinien di_0 und dj_0; dann ist die Verticale durch t_1 die neue Lage der Lastlinie.

Man suche sodann die neue Länge von bh, welche ke ist, und ziehe mit dem neuen Pole o das Polygon e, indem man bei e an-

fängt. Es muss durch b_6 gehen. Der neue Pol o wird so gefunden: Man ziehe bv parallel hh', dann theilt v die Gewichtslinie in zwei Theile, welche die verticalen Widerstände der Widerlager sind. Von v_1 aus ziehe man $v_1 o$ parallel kk', dann hat die Schlusslinie des Polygons e die Richtung kk'.

Ein einziges Gelenk an irgend einem Punkte eines unsymmetrischen Bogens kann in ähnlicher Weise behandelt werden.

Ein durch Temperaturwechsel hervorgebrachter Schub wird längs der Schlusslinie kk' wirken und die hervorgebrachten Biegungsmomente werden zu den von dieser Schlusslinie aus gerechneten Ordinaten des Polygons d proportional sein. Die Aenderungen der Spannweite müssen nicht für die horizontale Spannweite berechnet werden, sondern für deren Projection auf die Schlusslinie kk'. Die Construction dieser Componenten der Gesammtwirkung wird der früher angewandten gleich sein. Eine zweite Wirkung wird in einer zu kk' senkrechten Linie hervorgerufen werden. Die Veränderung der Spannweite für diese Construction ist die Projection der gesammten horizontalen Veränderung auf eine Linie senkrecht zu kk', und die Biegungsmomente, welche durch diese Kraft, die bei b_6 und senkrecht zur Schlusslinie einwirkt, hervorgerufen werden, sind zu den horizontalen Entfernungen der Theilungspunkte von b_6 proportional. Da diese Constructionen leicht zu machen sind, und die Scheerkräfte, sowie die Tangentialspannungen aus ihnen bestimmt werden können, so scheint es nicht nöthig, sie im Einzelnen zu geben.

Achtes Kapitel.

Bogen mit zwei Gelenken.

Nehmen wir die zwei Gelenke an, wie es in Fig. 9 [Taf. V] dargestellt ist, eines im Mittelpunkte, das andere an einem Ende. Es sei die Belastung u. s. w. dieselbe wie in Fig. 6.

Die Schlusslinie geht offenbar durch die zwei Gelenke, da bei ihnen das Biegungsmoment verschwindet.

Die noch zu erfüllende Bedingung ist, dass die Einsenkung der rechten Hälfte des Bogens in der Richtung dieser Linie dieselbe sei, wie in der linken.

Nehmen wir also an, der gerade Träger $b_6'p'$ sei senkrecht zur Schlusslinie bei b_6' befestigt und werde gebogen erstens durch die Momente M_d, wodurch wir die Einsenkungscurve $b_6'f'$ erhalten, wenn

b_6' als Pol genommen wird und wenn die Lasten nach der Art von mm ein Viertel der entsprechenden Ordinaten des Polygons d sind; und zweitens von den Momenten M_c, welche die Einsenkungscurve $b_6'g'$ ergeben, wenn derselbe Pol benutzt und die Lasten nach der Art von nn ebenso ein Viertel der entsprechenden Ordinaten des Polygons c sind. Man muss bemerken, dass die Punkte, an welchen diese Momente in dem Träger $b_6'p'$ concentrirt gedacht werden, auf Linien liegen, die parallel zu kk' sind und durch die Punkte d_5, d_6 u. s. w. gehen.

Aehnlich seien ff_3 und f_3f_6 die Einsenkungscurven des geraden Trägers d_3p (d_3p als Poldistanz gebraucht) unter der Einwirkung der Momente.

Wir haben eben eine Poldistanz gebraucht, die verschieden ist von der bei der rechten Hälfte des Bogens angewandten. Diese Poldistanzen müssen im selben Verhältnisse stehen wie die Grösse EI für die zwei Theile des Bogens. Wenn EI in beiden Theilen des Bogens das gleiche ist, so muss dieselbe Poldistanz genommen werden, um die Einsenkungscurven in beiden Theilen des Bogens zu erhalten. Auf gleiche Weise werden die Curven gg_3 und g_3g_6 gefunden. Nun müssen die Momente M_c, welche die Totaleinsenkung $p'g'-gg_6=\frac{1}{2}ai$ verursachen, so verlängert werden, dass sie eine Gesammteinsenkung $pf'-ff_6=\frac{1}{2}aj$ zu Stande bringen. Die Verhältnisslinien ai_0, aj_0' werden es uns ermöglichen, die neue Lage t_2 der Lastlinie zu diesem Zwecke zu finden.

Um o, den neuen Pol zu finden, ziehe man durch v_2, das die Lastlinie in Theile theilt, welche die verticalen Widerstände der Pfeiler sind, v_2o parallel b_6k. Dann zeichne man das Polygon e wie in Fig. 7, bei d anfangend. Es muss durch b_6 gehen. Wir können auch mit Hülfe der Verhältnisslinien untersuchen, ob ke_6' das verlangte Verhältniss zu hc_6' hat, was eine neue Probe für die Genauigkeit der Arbeit liefert.

Irgend ein unsymmetrischer Bogen mit Gelenken, deren Lage verschieden von der im betrachteten Falle ist, kann auf ähnliche Weise behandelt werden.

Die Einsenkungen in Folge des Temperaturwechsels sollten wie die in Fig. 8 behandelt werden, welche durch einen Schub längs der Schlusslinie veranlasst sind. Die Scheerkräfte und Tangentialspannungen können wie in Fig. 3 gefunden werden.

Bogen mit mehr als drei Gelenken lassen ein stabiles Gleichgewicht nicht zu und können nur in umgekehrter Lage als Hängebrücken verwendet werden. Diese sollen in der Folge behandelt werden. Wenn die Gelenke jedoch einige Steifheit besitzen, so dass

sie keine Gelenke mehr sind, sondern wie Mauerwerkfugen sich verhalten, so können wir immerhin noch Bögen construiren, die innerhalb gewisser Grenzen stabil sind, wenn auch die Zahl dieser Gelenke beliebig vermehrt wird. Von dieser Art sind Gewölbe aus Stein oder Backstein; sie sollen ebenfalls in der Folge besprochen werden.

Die Probe bei den Constructionen in den Figuren 6, 7, 8 und 9 kann durch ein ähnliches Verfahren gemacht werden, wie es bei den Figuren 2 und 3 angewandt wurde. In Fig. 2 bildeten wir z. B. die algebraische Summe der Quadrate der Grössen vom Typus *ss* und zeigten, dass diese Summe verschwindet. Wir können dasselbe Resultat in allen Fällen erhalten.

Neuntes Kapitel.

Die Hängebrücke zwischen Cincinnati und Covington (Fig. 10) [Taf. VI].

Die Hauptspannweite dieser Brücke beträgt 1057 Fuss vom Mittelpunkte des einen Thurmes zu dem des anderen, und die Endspannweiten betragen je 281 Fuss vom Widerlager zur Mitte des Thurmes. Der Pfeil des Kabels beträgt 89 Fuss bei mittlerer Temperatur, oder ungefähr $\frac{1}{11,87}$ der Spannweite. Ein einziges Kabel ist auf jeder Seite der Brücke. Jedes dieser Kabel besteht aus 5200 Drähten von Nr. 9, von denen jeder einen Querschnitt von einem Sechzigstel eines Quadratzolls und eine geschätzte Stärke von 1620 lb. hat. Jedes dieser Kabel hat einen Durchmesser von $12\frac{1}{3}$ Zoll und seine Stärke wird auf 4212 Tonnen geschätzt. Jedes Kabel geht auf dem Thurme über einen leicht gekrümmten Sattel, der auf 32 Rollen ruht, welche auf einer gusseisernen Platte von 11 Fuss Länge und 8 Fuss Breite laufen, und die einen Theil der Platform des Thurmes bildet. Da diese Unterlagsplatte horizontal ist, so sichert diese Methode der Unterstützung die genau senkrechte Richtung der Kraft, welche die Kabel auf die Thürme ausüben, ohne dass es nöthig wäre, die Neigung des Kabels zu beiden Seiten des Sattels gleich zu machen. Es haben daher die Kabel kein Bestreben, die Thürme umzustürzen, und diese brauchen also nur so stark zu sein, dass sie die auf sie kommenden verticalen Drücke aushalten können.

Da diese Brücke in einigen Punkten von anderen Hängebrücken weit verschieden ist, so scheint es nothwendig, ihre Eigenthümlichkeiten etwas mehr ins Einzelne zu beschreiben. Der Fahrweg und die

Trottoirs zusammen bilden einen 36 Fuss breiten Boden, der sich von einem Widerlager zum andern 1619 Fuss weit erstreckt. Er ist angefertigt aus 3 Schichten Planken, die fest verbolzt, zusammen 8 Zoll dick sind. Dieser Boden ist verstärkt durch eine doppelte Reihe gewalzter I-Träger, welche, 1630 Fuss lang, durch die ganze Mitte hinlaufen. Diese zwei Reihen I-Träger stehen über einander, und zwischen ihnen, quer eingelegt, in Entfernungen von je 5 Fuss, liegen seitwärtsgehende I-Träger, die am Kabel aufgehängt sind. Die obere Trägerreihe ist 9 Zoll hoch (30 lb. per Fuss schwer), die untere 12 Zoll hoch (und 40 lb. per Fuss schwer). Die Querträger sind 7 Zoll hoch (20 lb. per Fuss) und fest zwischen der doppelten Reihe der längslaufenden Träger eingeklemmt. Die Träger dieser Mittellinie sind je 30 Fuss lang und durch Platten verbunden, welche in die Höhlungen der I-Träger eingelegt sind; aber die Löcher für die Bolzen sind nicht rund, sondern Schlitze zwei- oder dreimal so lang, als die Dicke der Bolzen beträgt. Hierdurch wird ein Schiebgelenk hergestellt, wie es häufig bei der Befestigung der Enden der Eisenbahnschienen in Anwendung kommt. Diese Schiebgelenke gestatten dem Dielenwerk des Fahrweges, sich nach dem Wechsel der Temperatur und Feuchtigkeit auszudehnen und zusammenzuziehen, unbehindert durch die eisernen Träger, die daran angeschraubt sind.

Auf jeder Seite des Fahrwegs erstreckt sich ferner von Widerlager zu Widerlager ein schmiedeeisernes Fachwerk, bestehend aus Feldern von je 5 Fuss, an deren unteren Fugen eine Hängestange und ein Querträger befestigt ist. Dieses Fachwerk ist ein Gitter mit senkrechten Pfosten und Zugstangen, die über zwei Felder gehen, seine horizontalen Gurtungen haben in je 30 Fuss Entfernung Schiebgelenke.

Es ist offenbar, dass diese ganze Einrichtung des Bodens mit daran befestigten Trägern und Gittern nur wenig Steifheit besitzt; in der That ist seine Steifheit hauptsächlich die des Bodens selbst. Dieselbe wird eine sehr bedeutende Abweichung abwärts und aufwärts, etwa 25 Fuss aus der normalen Lage ohne Schaden gestatten. Die Aufgabe besagten Gitters ist ganz verschieden von der eines gewöhnlichen Versteifungsfachwerkes bei einer Hängebrücke. Sicher dient es dazu, concentrirte Lasten über kurze Entfernungen zu vertheilen, aber nicht so weit als erforderlich sein würde, wenn es die einzige Vorrichtung wäre, um das Kabel unter der Wirkung mobiler Lasten in seiner Lage zu erhalten. Seine wahre Leistung ist die Zerstörung aller Schwingungen und wellenförmigen Bewegungen in der verticalen Ebene des Kabels und die Verhinderung der Fortpflanzung

derselben von einem Punkte zum andern, in Folge der sehr grossen Reibungswiderstände seiner Schiebgelenke. Wenn eine Welle gegen elastische Kräfte wirkt, so wirft die Rückwirkung dieser Kräfte die Welle mit beinahe der ursprünglichen Stärke zurück; aber wenn sie gegen Reibung wirkt, so reibt sie sich selbst auf.

Die Vorkehrungen, deren man sich bei dieser Brücke bedient hat, um der Wirkung nicht balancirter Lasten zu widerstehen, bestehen aus einem System von Tauen, die sich vom Gipfel des Thurmes in geraden Linien nach den Theilen der Fahrbahn erstrecken, welche durch solche Lasten am meisten eingesenkt werden müssten. Es sind deren 76 vorhanden, 19 vom Gipfel jedes Thurmes. Die längsten Taue reichen so weit, dass nur 350 Fuss, d. h. wenig über ein Drittel der Spannweite, in der Mitte übrig bleiben, worüber sie sich nicht erstrecken. Jedes Tau ist ein Kabel von 2¼ Zoll Durchmesser, dessen Stärke auf 90 Tonnen angeschlagen ist. Sie sind in je 15 Fuss Entfernung an den unteren Fugen des Gitters befestigt und werden dadurch gerade gehalten, dass sie an die Hängestangen befestigt sind, wo sie dieselben kreuzen. In Fig. 10 ist dieses System gezeichnet, und zwar alle Zugtaue für ein Kabel sammt jeder dritten Hängestange. Solche finden sich über die ganze Brücke hin in je 5 Fuss Entfernung, aber es sind nur diejenigen gezeichnet, welche an denselben Punkten wie die Zugtaue befestigt sind.

Diese Zugtaue müssen den grössten Theil der unbalancirten Last tragen, indem sie zugleich einen Schub im Wegbette, entweder gegen das Widerlager, oder gegen den Thurm hervorbringen.

Es ist wirklich eine unentscheidbare Frage, wie die Last sich zwischen den Zugtauen und dem Gitter theilt, und das um so mehr wegen der Art und Weise, wie die anderen Enden der Zugtaue befestigt sind. Von den 19 Tauen, welche zum Gipfel eines Thurmes hinaufreichen, sind die acht dem Thurme nächsten an die Unterlagsplatte des Sattels befestigt und haben somit ein Bestreben, den Thurm in den Fluss herunter zu reissen; die übrigen elf laufen über den Thurm weg und ruhen auf einem kleinen besonderen Sattel neben dem Hauptsattel, von wo aus acht am mittleren Theile der Seitenspannweiten befestigt sind, wie Fig. 10 zeigt, während die anderen drei im Widerlager verankert sind.

In Hinsicht auf die unbestimmte Natur des Problems schien es am besten, anzunehmen, dass die Zugtaue im Stande sein sollten, ganz allein jeden Ueberschuss über die gleichförmig vertheilte Last an

jedem Theile der Brücke zu tragen (die gleichförmig vertheilte Last wird natürlich vom Kabel selbst getragen), und ferner, dass das Gitterwerk in Wirklichkeit einen Bruchtheil der unbalancirten Last trägt und die Biegungsmomente deswegen dieselbe relative Grösse haben, wie wenn sie die ganze unbalancirte Last trügen. Dieser Bruchtheil ist jedoch ganz unbekannt in Folge der Unmöglichkeit, irgend einen annähernden Werth des Trägheitsmomentes I für das combinirte Holz- und Eisenwerk der Fahrbahn zu finden.

Diese Art der Behandlung hat für unseren gegenwärtigen Zweck den Vorzug, dass die Construction, die wir benutzen, dieselbe ist, die gebraucht werden muss, wenn gar keine Zugtaue da sind und die gesammten Biegungsmomente, die durch mobile Lasten verursacht werden, durch die Steifheit des Gitters allein getragen werden sollen.

Um nun die Spannung in einem Zugtaue, wie z. B. in dem längsten, das zum rechten Thurme führt, zu bestimmen, mache man $v_1 v_2 =$ dem grössten nicht balancirten Gewichte, das unter irgend welchen Umständen an seinem unteren Ende concentrirt sein kann. Dieses Gewicht wird getragen durch den Widerstand des Bodens in der Richtung seiner Länge und die Spannung des Zugtaues. Die in beiden durch das Gewicht hervorgebrachten Spannungen werden gefunden, indem man von v_1 und v_2 die Linien $v_1 o$ und $v_2 o$ parallel beziehungsweise zu dem Zugtau und dem Boden zieht. Dann ist $v_1 o$ die Spannung des Taues, und die der anderen Taue können in ähnlicher Weise gefunden werden. Es ist unmöglich, mit derselben Gewissheit zu bestimmen, wie die Spannung $o v_2$ parallel zum Boden ausgehalten wird. Sie kann ganz und gar vernichtet werden von der Zusammendrückung, die sie in dem Stücke des Bodens zwischen dem Gewichte und dem Thurme oder dem Widerlager hervorbringt; oder sie mag getragen werden durch den in dem Boden links vom Gewichte hervorgerufenen Zug; oder die Spannung $o v_2$ mag sich in irgend welcher Weise auf diese zwei Theile des Bodens vertheilen, so dass $v_1 v_1'$ den Zug zur Linken und $o v_2'$ die Zusammendrückung zur Rechten des Gewichts darstellt. Im vorliegenden Falle ist es am wahrscheinlichsten, dass die Spannung durch Zusammendrückung des Bodens zur Rechten getragen wird, denn der Bodenbau ist schlecht geeignet, Zug auszuhalten, sowohl wegen der Schiebgelenke, als auch wegen des Mangels anderer zuverlässiger Befestigungen der Länge nach. Dagegen ist er sehr wohl geeignet, der Zusammendrückung zu widerstehen. Die Fahrbahn muss demnach beim Thurme im Stande sein, der Summe aller der Pressungen zu widerstehen, die von allen unbalancirten Gewichten,

welche an den Enden der 19 Taue zugleich concentrirt werden können, hervorgebracht werden.

Es gibt noch ein wichtiges Element zur Versteifung, das in dieser Besprechung der Taue nicht berücksichtigt worden ist und wesentlich dazu beiträgt, die grössten Spannungen zu verringern, denen sie sonst unterworfen sein könnten. Dieses ist die eigene Steifheit des Kabels selbst, das aus sieben gleichen kleineren Kabeln besteht, die in ein einziges Kabel verwandelt wurden, indem sechs Kabel um das siebente herumgelegt und dann das Ganze durch eine feste Drahtumwickelung umschlossen wurde, sodass das ganze Kabel mit seinem Durchmesser von 12¼ Zoll der Biegung einen Widerstand entgegensetzt gleich einem Sechstel bis der Hälfte eines hohlen Cylinders von demselben Durchmesser und gleichem Metallquerschnitte. Welcher von diesen Brüchen anzunehmen sei, hängt unter Anderm von der Festigkeit und Steifheit der Umwickelung ab.

Es ist gerade diese eigene Steifheit des Kabels, auf die man sich beim mittleren Theil der Brücke, zwischen den zwei längsten Zugtauen ganz bedeutend verlassen hat, um Formänderungen zu widerstehen, welche von unbalancirten Gewichten verursacht werden.

Wie man voraussehen kann, sind die Formänderungen in Wirklichkeit viel grösser im mittleren Theile der Brücke, als sonstwo, obgleich sie in denjenigen Theilen der Brücke, wo die Taue angebracht sind, weit grösser gewesen wären, wenn dort die Taue fehlten.

Die Mitte eines Kabels ist verhältnissmässig stabil, während es ganz beträchtliche Schwingungen durchmacht, wie durch einen einfachen Versuch mit einem Seile oder einer Kette leicht erkannt werden kann.

Bestimmen wir nun den relativen Betrag der Spannungen in dem Versteifungsgitter auf Grund der Annahme, dass die wirklichen Spannungen irgend ein unbekannter Bruchtheil derjenigen Spannungen sind, welche entstehen würden, wenn keine Zugtaue vorhanden wären und das Gitter das einzige Mittel zur Versteifung des Kabels bliebe. Wir haben also nur die Gesammtspannungen zu bestimmen unter der Annahme, es seien keine Zugtaue vorhanden, und dann jede so erhaltene Spannung durch n (das wir nicht kennen) zu dividiren, um die verlangten Resultate zu erhalten. Ziehen wir das Seilpolygon d, welches einer gleichförmigen Belastung von der Höhe xy entspricht, und eine Senkung bd, sechsmal so gross, als die des Kabels in der Mitte, hat. Die Belastung des Kabels ist so nahe gleichförmig, dass jede der Ordinaten von der Art von bd mit hinreichender Genauigkeit

als das Sechsfache der Ordinate des Kabels betrachtet werden kann. Mit gleicher Leichtigkeit, wie sechs, hätte man jedes andere Vielfache benutzen können. Um zu bewirken, dass das Polygon die erforderliche Senkung bei irgend einer angenommenen Poldistanz habe, ist es nothwendig, den Maassstab der Gewichte auf besondere Weise anzunehmen, wie er leicht auf verschiedenen Wegen bestimmt werden kann. Wir können ihn z. B. wie folgt finden.

Es sei W eines der concentrirten Gewichte,
D die Senkung des Kabels in der Mitte,
S die Spannweite der Brücke,
M das Biegungsmoment in der Mitte, das von den einwirkenden Gewichten herrührt.

Dann ist, wenn die Poldistanz $= \frac{1}{3}S$ ist, $M = \frac{1}{3}S \times 6D = 2SD$; denn das Moment ist das Product der Poldistanz mit der Ordinate des Seilpolygons. Indem wir ferner das Moment im Centrum aus den einwirkenden Kräften berechnen, finden wir

$$M = \tfrac{11}{2} W \times \tfrac{1}{2}S - 5W \times \tfrac{1}{4}S = \tfrac{3}{2} WS,$$

worin das erste Glied der rechten Seite das Moment des Widerstandes der Pfeiler und das zweite Glied das Moment der an ihren Schwerpunkten einwirkenden concentrirten Lasten ist. Aus der Gleichung

$$\tfrac{3}{2} WS = 2SD \quad \text{folgt dann} \quad W = \tfrac{4}{3}D.$$

Wenn folglich ein Drittel der Spannweite die Poldistanz oder die wahre horizontale Spannung einer Seilcurve darstellen soll, welche die sechsfache Senkung des Kabels hat, so ist, wenn die Spannweite in zwölf gleiche Theile getheilt wird, jedes concentrirte Gewicht durch eine Länge dargestellt, welche gleich vier Dritteln der Senkung des Kabels ist. Die wahre horizontale Spannung wird das Sechsfache derjenigen des Seilpolygons sein, oder sie wird in dem angewandten Maassstabe durch eine Linie von der doppelten Länge der Spannweite dargestellt werden. Indem wir nun b zum Pol nehmen, tragen wir in Entfernungen $bb_4 = bb_4' = \frac{1}{3}S$, auf $b_4'w_1 = b_4w_1' = \frac{1}{2}W = \frac{2}{3}D$, sodass diese zusammen das bei b concentrirte Gewicht darstellen; ebenso möge $w_1w_2 = W$ das bei b_2 concentrirte Gewicht darstellen u. s. w. Dann lässt sich das Seilpolygon d construiren, indem man dd_1 parallel bw_1, d_1d_2 parallel bw_2 u. s. w. zieht. Wenn $bd = 6D$, so muss das Polygon durch b_6 und b_6' gehen, welches die Probe für die Genauigkeit der Arbeit ist.

Um nun die Wirkung einer unbalancirten Last zu untersuchen, welche die Hälfte der Spannweite bedeckt, wollen wir die Hälfte der Last von der rechten Hälfte der Spannweite wegnehmen und sie auf

die linke Hälfte derselben übertragen, sodass xz und xb die Stärke der Belastung resp. auf der linken und rechten Hälfte darstellen, indem die Gesammtlast dieselbe ist, wie vorher. Wenn es wünschenswerth ist, anzunehmen, dass die Gesammtlast durch die unbalancirte Last vermehrt worden ist, so haben wir einfach den Maassstab so zu verändern, dass dieselbe Länge der Lastlinie $(b_4'w_5 + b_4w_5')$ wie zuvor die gesammte Belastung vorstellt. Dieses wird auch der horizontalen Spannung einen neuen Werth geben.

Nun werde das neue Seilpolygon c gezogen, welches der neuen Vertheilung der concentrirten Gewichte entspricht. Es ist nothwendig, dass die Schlusslinie dieses Polygons c horizontal ist und dieses kann erreicht werden entweder, indem man das Polygon in beliebiger Lage zeichnet und die Ordinaten des Typus bc gleich denen in dem so gezogenen Polygon aufträgt, oder besser, wie in der Figur geschah, indem man in jeder Gewichtslinie den Theil der Gesammtlast aufträgt, welcher von jedem Pfeiler getragen wird und der sich leicht, wie folgt, berechnen lässt. Der Schwerpunkt der Belastung theilt die Spannweite im Verhältniss von 17 zu 27. Folglich sind $\frac{27}{44}$ und $\frac{17}{44}$ der Gesammtlast die Widerstände der Pfeiler, oder, da die Gesammtlast $= 11\,W$, haben wir $b_4'u_6 = \frac{27}{4}\,W$ und $b_4u_6' = \frac{17}{4}\,W$. Nun mache man $u_6u_5 =$ dem bei b_5 concentrirten Gewichte u. s. w. und $b_4'u_2 + b_4u_1' =$ dem bei b_1 concentrirten. Dann zeichne man das Polygon c.

Das Polygon c hat dieselbe Senkung in der Mitte, wie das Polygon d; denn es findet sich wie früher

$$M = \tfrac{17}{4}\,W \times \tfrac{1}{2}S - \tfrac{5}{2}\,W \times \tfrac{1}{4}S = \tfrac{3}{2}\,WS,$$

worin das erste Glied rechts das Moment des Widerstandes des rechten Pfeilers ist, und das zweite Glied das Moment der concentrirten Gewichte, die an ihrem Schwerpunkte wirken.

Durch ähnliche Berechnungen können wir folgende Gleichheiten beweisen:

$$d_5c_5 = d_1c_1 = -\,d_1'c_1' = -\,d_5'c_5';$$
$$d_4c_4 = d_2c_2 = -\,d_2'c_2' = -\,d_4'c_4';$$
$$d_3c_3 = -\,d_3'c_3'.$$

Die Grössen des Typus dc sind den Biegungsmomenten proportional, welche das Versteifungsgitter aushalten muss, wenn es das Kabel in seiner ursprünglichen Form erhält, während dies der Einwirkung einer nicht balancirten Last von der Höhe bx unterworfen ist, und zwar beruht dies auf der Annahme, dass das Gitter Gelenke an den Enden hat und mittelst derselben an die Pfeiler befestigt ist; denn in diesem

Falle ist das Kabel in der Lage eines Bogens mit Gelenken an den Enden. Die Bedingung, welche dann erfüllt ist, ist diese:

$$\Sigma(M_d y) = \Sigma(M_c y)$$

oder $$\Sigma(M_d - M_c)y = 0 \quad \text{d. h.} \quad \Sigma(cd)y = 0.$$

Diese letztere wird aber, wie man aus den obigen Gleichungen sieht, erfüllt, denn jedem Product wie z. B. $+ b_1 d_1 \times d_1 c_1$ entspricht ein anderes $- b_1' d_1' \times d_1' c_1'$ von derselben Grösse, aber entgegengesetztem Vorzeichen. Das Polygon c hätte man mittelst eines zweiten Seilpolygons durch ein ganz gleiches Verfahren, wie das früher angewandte, erhalten können; aber da es vortheilhaft erscheint, den Zusammenhang zu zeigen zwischen den Methoden der Behandlung des Bogens, welcher selbst steif ist, und des biegsamen Bogens oder Kabels, welches durch ein besonderes Fachwerk versteift werden muss, so sind wir von unserer früher angewandten Methode für die Bestimmung des Polygons c abgewichen, was sich leicht thun lässt, wenn sowohl c als d parabolisch sind.

Berechnen wir nun das Biegungsmoment bei der Verticalen durch b_5, so finden wir es

$$= d_5 c_5 \times \tfrac{1}{3} S = M_c - M_d.$$

Es ist aber $$M_c = \tfrac{27}{4} W \times \tfrac{1}{12} S = \tfrac{9}{16} WS$$

$$M_d = \tfrac{11}{2} W \times \tfrac{1}{12} S = \tfrac{11}{24} WS,$$

folglich $$M_c - M_d = \tfrac{5}{48} WS.$$

Berechnen wir auch das Biegungsmoment bei der Verticalen durch b_4, so erhalten wir

$$M_c = \tfrac{27}{4} W \times \tfrac{1}{6} S - \tfrac{3}{2} W \times \tfrac{1}{12} S = \quad WS$$

$$M_d = \tfrac{11}{2} W \times \tfrac{1}{6} S - \quad W \times \tfrac{1}{12} S = \tfrac{5}{6} WS$$

und daher $$M_c - M_d = \tfrac{1}{6} WS.$$

Aehnliche Berechnungen lassen sich für die übrigen Punkte machen und so wird sich das bemerkenswerthe Resultat als wahr erweisen, dass die im Versteifungsgitter durch die angenommene Belastung verursachten Biegungsmomente dieselben sind, wie sie durch eine positive Belastung zur Linken von einer Tiefe yz und eine negative Belastung zur Rechten von gleicher Höhe yb verursacht worden wären.

Denn man berechne die von einer solchen Belastung verursachten Momente an den Punkten b_5, b_4. Der einer solchen Belastung zukommende Widerstand der Pfeiler ist $= \tfrac{5}{4} W$, folglich

$$M_5 = \tfrac{5}{4}\,W \times \tfrac{1}{12}S = \tfrac{5}{48}\,WS$$

und $$M_4 = \tfrac{5}{4}\,W \times \tfrac{1}{6}S - \tfrac{1}{2}\,W \times \tfrac{1}{12}S = \tfrac{1}{6}\,WS,$$

u. s. w., u. s. w.

Wir kommen so zur folgenden Ansicht von den Spannungen, welchen das Versteifungsgitter unterworfen ist. Das Gitter ist belastet mit den einwirkenden Gewichten, welche abwärts wirken und wird aufwärts gezogen durch eine gleichförmig vertheilte negative Belastung, deren Gesammtbetrag der positiven Belastung gleich ist, so dass die in der That an irgend einem Punkte wirkende Last als die algebraische Summe der zwei Belastungen mit verschiedenen Vorzeichen, die dort einwirken, betrachtet werden kann. Dass dies sich so verhält, hätte gleich von vornherein aus der Betrachtung der Thatsache abgeleitet werden können, dass das Kabel nur eine gleichförmige Last tragen kann, wenn es seine ursprüngliche Gestalt behalten soll; aber es scheint in verschiedener Hinsicht nützlich, die numerische Uebereinstimmung dieser Ansicht mit Satz IV zu zeigen, von dem sie in der That ein besonderer Fall ist. Es ist unnöthig, einen allgemeinen Beweis zu liefern, dass dies so sein muss; statt dessen wollen wir jetzt einen Satz in Bezug auf Versteifungsfachwerke aufstellen, dessen Wahrheit aus früher angezogenen Betrachtungen genügend erhellt.

Satz VII. Die im Versteifungsfachwerke eines biegsamen Kabels oder Bogens durch irgend eine Belastung herbeigeführten Spannungen sind dieselben, wie diejenigen, die darin verursacht würden, wenn eine vereinte positive und negative Belastung darauf einwirkte, die wie folgt vertheilt wäre: Die positive Belastung ist die wirkliche Belastung, und die negative Belastung ist numerisch der positiven Belastung gleich, aber so vertheilt, dass sie keine Biegungsmomente im Kabel oder Bogen hervorruft, d. h. das Kabel oder der Bogen ist das Seilpolygon für diese negative Belastung.

Unter biegsamem Kabel oder Bogen ist hier ein solcher verstanden, der Gelenke an den Punkten hat, wo er das Versteifungsfachwerk trägt. Es ist aber nicht nöthig, dass wirklich Gelenke an diesen Punkten sind; die Bedingung ist genügend erfüllt, wenn die Biegsamkeit dort beträchtlich grösser ist, als in dem Fachwerke welches es trägt.

Die Wahrheit des Satzes VII ist von früheren Bearbeitern dieses Gegenstandes in dem besonderen Falle des parabolischen Hängekabels erkannt worden und er ist irrthümlich zur Bestimmung der Biegungsmomente im elastischen Bogen angewandt worden. Er ist zu diesem Zwecke in zwei Punkten ungenau, insofern nämlich erstens der Bogen, auf den er angewandt wird, nicht parabolisch ist, obgleich die ihm

zukommende negative Belastung als gleichförmig gedacht wird, und zweitens der Horizontalschub nicht derselbe ist für die verschiedenen Arten von Bögen, während jene Anwendung denselben Schub für alle annimmt, denjenigen nämlich eines biegsamen Bogens oder eines mit drei oder mehr Gelenken.

Ein ähnlicher Satz ist vor Kurzem in einer Schrift über diesen Gegenstand*) aufgestellt worden, aber in diesem Werke versteift das Fachwerk ein einfaches parabolisches Kabel und ist, wie angenommen wird, nicht an die Pfeiler befestigt, so dass es sich von jedem Pfeiler heben kann, sobald dessen Widerstand negativ wird. Da dieses für eine Construction in der Praxis nicht gestattet werden sollte, so soll hier der Fall nicht erörtert werden. In Uebereinstimmung mit Satz *VII* wollen wir nun von Neuem die Biegungsmomente bestimmen, die von einer unbalancirten Last zur Linken, deren Intensität durch bz bezeichnet sein mag, herrühren. Wie wir vorhin gesehen haben, bringt eine solche dieselbe Wirkung hervor, wie eine positive Belastung von einer Intensität $yz = fm = \frac{1}{2}bz$ zur Linken und eine negative Belastung von einer Intensität $yb = fn = \frac{1}{2}bz$. Indem man nun g als Pol gebraucht, trage man mit einer Poldistanz $gf_2 = \frac{1}{3}$ der Spannweite das concentrirte Gewicht $p_1p_2 =$ der bei b_1 einwirkenden Last u. s. w. auf nach demselben Maassstabe, wie die Gewichte in den früheren Constructionen aufgetragen wurden, und in einer solchen Lage, dass g der Mitte der gesammten Last gegenüber liegt, was bewirkt, dass die Schlusslinie horizontal wird. Dann zeichne man das diesen Gewichten entsprechende Seilpolygon a. Die Ordinaten des Typus af sind nach Satz VII den im Versteifungsfachwerke durch die unbalancirte Last verursachten Biegungsmomenten proportional, wenn das Fachwerk einfach mit den Enden an die Pfeiler befestigt ist; und, wie wir gesehen haben, ist jede der Grössen af identisch mit der entsprechenden Grösse cd.

Wenn das Versteifungsfachwerk an seinen Enden horizontal befestigt ist, so muss eine Schlusslinie hh' in einer solchen Lage gezogen werden, dass $\Sigma(M) = 0$ ist; und da es offenbar ist, dass sie das Seilpolygon symmetrisch theilen muss, geht sie durch f, dessen Centralpunkt.

Wie in einem früheren Kapitel angegeben wurde, werden die grössten Biegungsmomente an gewissen Punkten der Spannweite hervorgerufen, wenn die unbalancirte Last etwas über die Hälfte der Spannweite be-

*) Graphical Statics, A. J. Du Bois, p. 329, published by John Wiley & Son New York.

deckt. Im Falle eines parabolischen Kabels oder Bogens tritt das Maximum maximorum der Biegungsmomente dann auf, wenn diese Last sich über zwei Drittel der Spannweite erstreckt, wie von Rankine in seiner Angewandten Mechanik durch analytisches Verfahren bewiesen worden ist. Es möge sich also jetzt die Last über die ganze Spannweite, mit Ausnahme des Drittels zur Rechten, erstrecken mit einer Intensität, die durch $bz = q_3 q_4'$ dargestellt wird. Wenn dann $f_2' q_3 = \frac{1}{2} f_2' q_4'$ ist, so kann das Fachwerk nach Satz VII betrachtet werden als einer positiven Last von der Intensität $f_2' q_3$ links von b_2' und einer negativen Last von der Intensität $f_2' q_4'$ rechts von b_2' unterworfen. Indem wir g' als Pol und dieselbe Poldistanz wie vorher gebrauchen, tragen wir das bei b_5 concentrirte Gewicht $q_6 q_5$ u. s. w. so auf, dass g' der Mitte der Gewichtslinie gegenüber liegt. Wir erhalten so das Seilpolygon e, in welchem die Ordinaten von der Art von ef den Biegungsmomenten des Fachwerks unter der angenommenen Belastung proportional sind, wenn dessen Enden einfach an die Pfeiler befestigt sind.

Nun war bd die Ordinate eines Seilpolygons mit derselben horizontalen Spannung, und welches einer Last von derselben Intensität zukommt, welche die ganze Spannweite bedeckt. Man wird finden, dass $bd = \frac{27}{4} f_2 e_2$, was sich so ausdrücken lässt: Das grösste Biegungsmoment, welches im Versteifungsfachwerke durch eine unbalancirte Last von gleichförmiger Intensität hervorgebracht werden kann, ist $\frac{4}{27}$ desjenigen, welches in einem einfachen Fachwerke durch eine Last hervorgebracht wird, welche dieselbe Intensität hat und die ganze Spannweite bedeckt. Dieses Resultat erhielt Rankine auf analytischem Wege. Wenn das Fachwerk horizontal an seinen Enden befestigt ist, so müssen wir eine Schlusslinie kk' ziehen, welche die zuvor für den geraden an seinen Enden befestigten Träger benützten Bedingungen erfüllt, wie dies früher in Verbindung mit der St. Louiser Brücke erörtert wurde. Durch die Construction eines zweiten Seilpolygons, wie sie dort gegeben ist, finden wir die Lage von kk'; dann werden die Ordinaten ke den Biegungsmomenten des Versteifungsfachwerks proportional sein.

Die Scheerkraft in dem Fachwerke wird aus der Belastung gefunden, welche das Biegungsmoment veranlasst, gerade wie in irgend einem einfachen Fachwerke. Die horizontale Spannung im Kabel ist dieselbe, sobald die Gesammtlast auf der Spannweite dieselbe ist und wechselt nicht in Folge irgend einer Veränderung in der Vertheilung der Belastung, was klar aus Satz VII hervorgeht. Die grösste Spannung des Kabels ergibt sich, wenn die mobile Last sich über die ganze Spannweite erstreckt und muss mittelst eines Kräftepolygons gefunden

werden, das als Seilpolygon die Curve des Kabels selbst ergibt, wie es der Fall wäre, wenn man die Gewichte w_1, w_2 u. s. w. und eine Poldistanz von sechsmal bb_4 = der doppelten Spannweite gebrauchte.

Die Wirkungen des Temperaturwechsels auf die Versteifung einer Hängebrücke sind bedeutender als die auf die Versteifung eines Bogens, weil sich die Gesammtverlängerung des Kabels in den Seitenspannweiten auf die Hauptspannweite überträgt und in deren Mitte eine Einsenkung bewirkt. Dieses ist ein Grund, warum Zugtaue eine für Hängebrücken besonders geeignete Art der Versteifung abgeben. Wenn aber angenommen wird, dass das Fachwerk einen Theil des von der Verlängerung des Kabels herrührenden Biegungsmomentes trägt, so ist es offenbar, dass, wenn das Fachwerk einfach an den Pfeilern befestigt ist, die so hervorgebrachten Biegungsmomente den Ordinaten vom Typus *bd* proportional sind; denn das Kabel überträgt durch seine Verlängerung einen Theil seiner gleichförmig vertheilten Last auf das Versteifungsfachwerk. Diejenige Last, welche das Kabel noch zu tragen hat, ist gleichmässig vertheilt, wenn das Kabel immer noch parabolisch bleibt, deswegen ist auch die an das Fachwerk abgegebene gleichförmig vertheilt.

Wenn das Fachwerk horizontal an den Pfeilern befestigt ist, so muss die Schlusslinie der Curve *d* so geändert werden, dass $\Sigma(M) = 0$ ist, und dann werden die durch den Temperaturwechsel verursachten Biegungsmomente den Ordinaten zwischen der Curve *d* und dieser neuen Schlusslinie proportional sein.

Noch bleibt übrig, die Stabilität der Thürme und der Verankerungswiderlager zu besprechen. Die horizontale Kraft, welche die Pfeiler umzustürzen strebt, rührt nur von einigen wenigen Zugtauen her, wie früher angegeben wurde, und ist so klein, dass sie nicht berücksichtigt zu werden braucht.

In dem vorliegenden Falle ist das Gewicht des Widerlagers fast genau dasselbe, wie die äusserste Stärke des Kabels. Gesetzt, es seien *st* = *sv* die Linien, welche diese Grössen in ihrer relativen Lage zum Widerlager darstellen. Da die Resultante *sv* die Vorderseite des Widerlagers schneidet, würde das Widerlager sich überschlagen, ehe das Kabel reissen könnte. Und da der Winkel *vsr* grösser ist, als der Reibungswinkel zwischen dem Widerlager und dem Grunde, worauf es steht, so würde das Widerlager, stünde es auf der Oberfläche des Grundes, vorwärts rutschen, ehe das Kabel reissen könnte.

Als geringsten Werth, den der Sicherheitsfactor für das Kabel bei der grössten Belastung annimmt, ergibt die Berechnung die Zahl 6.

Man nehme $st' = \frac{1}{6} st$ als die grösste je im Kabel erzeugte Spannung, so schneidet sr', die Resultante von sv und st', die Grundfläche so weit hinter der Vorderseite, dass es augenscheinlich ist, dass das Widerlager genügende Stabilität gegen das Umkippen besitzt, und der Winkel vsr' ist um so viel kleiner, als der kleinste Reibungswinkel zwischen dem Widerlager und der Erde darunter, dass das Widerlager dem Punkte, wo es rutschen müsste, durchaus nicht nahe wäre, selbst wenn es auf der Oberfläche des Bodens stünde. Es muss bemerkt werden, dass alle Zugseile in den Seitenspannweiten um so mehr dazu beitragen, die Spannung des Kabels zu vermindern, je mehr man sich dem Widerlager nähert, und dass sie so zu dessen Stabilität beitragen. Ebenso kann der Schub der Fahrbahn die Stabilität des Widerlagers fördern, sowohl gegen das Umkippen, als gegen das Rutschen.

Zehntes Kapitel.

Der continuirliche Träger mit veränderlichem Querschnitte.

In den vorhergehenden Kapiteln ist nachgewiesen worden, dass die Untersuchung der verschiedenen Arten des Bogens von der eines geraden Trägers abhängt; da aber bis jetzt keine graphische Untersuchung veröffentlicht worden ist, welche den Träger mit veränderlichem Querschnitt und Trägheitsmoment behandelt, so hat sich unsere Erörterung auf den Fall der Bogen mit constantem Trägheitsmoment beschränken müssen.

Es wurden jedoch im ersten Kapitel gewisse Bemerkungen gemacht, deren Zweck ist, die nahe Uebereinstimmung der Resultate bei constantem Trägheitsmoment mit jenen zu zeigen, welche man erhält, wenn das Trägheitsmoment veränderlich ist. In diesem Kapitel schlagen wir eine neue Lösung des Problems des continuirlichen Trägers im allgemeinsten Falle des veränderlichen Trägheitsmoments vor, wenn der Träger auf Pfeilern ruht, die beliebige mit den Elasticitätsgrenzen des Trägers verträgliche Höhen haben. Diese Lösung wird jene Bemerkungen bestätigen und uns in den Stand setzen, die Art und Weise, in welcher der Wechsel des Trägheitsmomentes die Vertheilung der Biegungsmomente beeinflusst, leicht zu übersehen; und mittelst dieser Lösung lässt sich auch der Bogen mit veränderlichem Trägheitsmoment direct behandeln.

Abgesehen von der Wichtigkeit des continuirlichen Trägers in Fällen, wo er selbst die ganze Brücke ausmacht, ist er auch, wie wir

uns hier zu bemerken gestatten, ganz besonders geeignet, um als Versteifung einer Bogenbrücke mit mehreren Spannweiten zu dienen, in welcher die Bogen biegsam sind. In der That ist es die Ueberzeugung des Verfassers, dass der elastische Bogen ohne Gelenke, welcher für die Brücke zu St. Louis gewählt wurde, ein kostspieliger Missgriff war, und dass, wenn ein metallener Bogen gewünscht wurde, ein biegsamer Bogen mit Versteifungsfachwerk billiger und in jeder Hinsicht vorzuziehen gewesen wäre.

Wir wollen die Gleichung für die Einsenkungen in der Form schreiben

$$mD \cdot \frac{EI_0}{mn^2n'} = \sum \left(\frac{Mi}{nn'} \cdot \frac{x}{n}\right),$$

worin n die Zahl ist, womit irgend eine horizontale Dimension des Trägers getheilt werden muss, um die correspondirende Dimension auf der Zeichnung zu erhalten; n' der Divisor, durch den die Kraft getheilt werden muss, um die Länge, in der sie auf der Zeichnung dargestellt wird, zu erhalten; m ein willkürlicher Factor, der uns ermöglicht, diejenige Poldistanz für das zweite Seilpolygon zu benutzen, die am bequemsten sich erweist, I_0 das Trägheitsmoment des Trägers an irgend einem festgewählten Querschnitte, der als Maassstab angenommen wird, um mit ihm die Werthe von I an anderen Querschnitten zu vergleichen, und endlich $i = I_0 : I_1$ das Verhältniss von I_0 (des Normalträgheitsmoments) zu I (dem Momente an einem andern Querschnitte). Um die allgemeinen Eigenschaften der Träger nachzuweisen, braucht die Gleichung nicht mit den Coëfficienten mnn' beschwert zu werden; aber zur Erklärung der graphischen Construction sind sie sehr nützlich und dann können sie, wenn nöthig, sofort in die Gleichung eingeführt werden. In der Gleichung

$$D \cdot EI_0 = \Sigma_a^o (Mix)$$

ist die Grösse D die Einsenkung irgend eines Punktes O eines Trägers unter die Tangente an dem Punkte a, wo die Summation beginnt, und M ist das wirkliche Biegungsmoment an irgend einem Punkte zwischen O und a. Diese Momente M bestehen an irgend einem Punkte im Allgemeinen aus drei Grössen, die in der Construction durch die positive Ordinate des den Gewichten entsprechenden Seilpolygons und durch die zwei negativen Ordinaten der Dreiecke dargestellt werden, in welche wir die negative Momentenfläche getheilt haben. Wenn wir diese Componenten von M dadurch auseinanderhalten, dass wir die den Gewichten entsprechenden durch M_0 und die der rechten und

linken negativen Fläche zukommenden Componenten durch M_1 und M_2 bezeichnen, so wird die Gleichung für die Einsenkungen:

$$D \cdot EI_0 = \Sigma_a^o (M_0 ix) + \Sigma_a^o (M_1 ix) + \Sigma_a^o (M_2 ix).$$

Nehmen wir nun O am Pfeiler an einem Ende der Spannweite und dehnen wir die Summation über die ganze Spannweite aus.

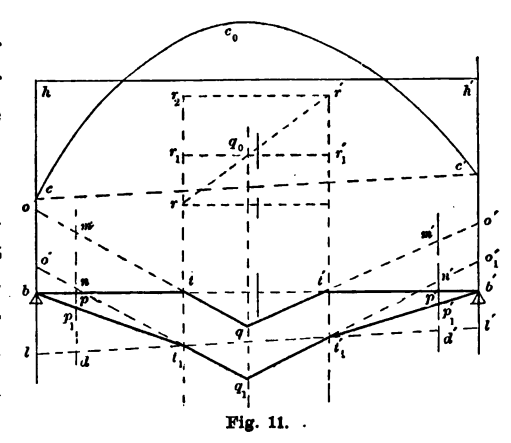


Fig. 11.

Wenn b und b' in Fig. 11 die Pfeiler sind, so wollen wir annehmen, dass O mit b und a mit b' zusammenfällt; ebenso nehmen wir für den Augenblick an, I sei constant, also $i = 1$ an allen Punkten des Trägers.

Dann haben wir

$$D_b \cdot EI = \bar{x}_0 \Sigma_{b'}^b (M_0) + \bar{x}_1 \Sigma_{b'}^b (M_1) + \bar{x}_2 \Sigma_{b'}^b (M_2),$$

worin D_b die Einsenkung von b unter die Tangente bei b', $\bar{x}_0$ die Distanz des Schwerpunktes der Momentenfläche der einwirkenden Gewichte von b ist, während $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ die Entfernungen der Schwerpunkte der negativen Flächen von b sind. In Fig. 11 sei cc_0c' die den Gewichten zukommende positive Fläche, welche $\Sigma_{b'}^b (M_0)$ darstellt, während $\Sigma_{b'}^b (M_1)$ und $\Sigma_{b'}^b (M_2)$ durch hcc' und $hh'c'$ repräsentirt werden. Es sei der Schwerpunkt von cc_0c' in qq_0, während die Schwerpunkte der beiden negativen Flächen in tr und $t'r'$ liegen. Es sei ferner rr_2 die zu einer angenommenen Basis gehörende Höhe eines Dreiecks von gleichem Flächeninhalte wie cc_0c', dann ergibt sich offenbar durch ein Verfahren, wie das bei Fig. 2 angewandte, dass rr_1 und r_1r_2 die Höhen des rechten und des linken negativen Dreiecks mit derselben angenommenen Basis sind, wenn man voraussetzt, dass der Träger horizontal an den Pfeilern befestigt ist.

Indem wir nun die Constanten mnn' in die letzte und in die vorletzte Gleichung einführen, wird die Beziehung zwischen den Grössen der Art, dass, wenn die Momente als Gewichte an ihren Schwerpunkten angebracht werden, mit der Poldistanz $pt = EI : mn^2n'$ ein Seilpolygon sich ergibt, welches an den Pfeilern die vergrösserte Einsenkungscurve berühren wird, die wir erhalten, wenn wir die ver-

theilten Momente als Gewichte brauchen; und die Einsenkung beim Pfeiler b unter die Tangente bei b' wird dieselbe sein, wie diejenige dieser vergrösserten Einsenkungscurve, und umgekehrt.

Es sei $pm = r_1 r_2$, $p'm' = rr_1$ und $pt = p't'$, so bilden t und t' den Pol, pm und $p'm'$ die negativen Lasten und $pm + p'm'$ die positive Last. Dann ist $btqt'b'$ das Seilpolygon für diese Lasten. Die Senkung von b unter $b't'$ verschwindet, wie sie sollte, im Falle der Träger horizontal über den Pfeiler befestigt ist. Nun verändere man die Richtung der Tangenten an den Pfeilern so, dass die Tangenten an die vergrösserte Einsenkungscurve die Richtungen bt_1 und $b't_1'$ annehmen. Dann nehmen die Drucklinie und das Kräftepolygon eine neue Lage an, so dass t_1 und t_1' den Pol bilden, und $dn = pm$ und $d'n' = p'm'$ die positive Last darstellen, während np_1 und $n'p_1'$ die neuen negativen Lasten sind, welche bewirken werden, dass die Seiten bt_1 und $b't_1'$ des zu ihnen gehörenden Seilpolygons $bt_1q_1t_1'b'$ die angenommenen Richtungen haben.

Es existiren in dieser Figur verschiedene Beziehungen zwischen den vorkommenden Grössen, auf die wir aufmerksam machen wollen. Offenbar kann, im Fall I nicht constant ist, aus der Fläche cc_0c', deren Ordinaten zu M_0, dem wirklichen von den Gewichten herrührenden Biegungsmomente proportional sind, durch einfache Multiplication eine zweite Fläche erhalten werden, deren Ordinaten zu $M_0 i$, das wir das wirksame Biegungsmoment nennen werden, proportional sind, da i an jedem Punkte des Trägers bekannt ist. Ferner lässt sich die Verticale durch den Schwerpunkt dieser positiven wirksamen Momentenfläche eben so leicht finden, wie die durch den Schwerpunkt der wirklichen positiven Momentenfläche. Wir wollen diese Verticale die positive Centralverticale nennen. Ferner, die zu $M_1 i$ und $M_2 i$ proportionalen negativen wirksamen Momentenflächen können aus den dreieckigen zu M_1 und M_2 proportionalen Flächen durch einfache Multiplication gefunden werden, und wenn wir die Verticalen durch die Schwerpunkte dieser wirksamen Momentenflächen suchen, so werden wir dieselben Verticalen erhalten, was auch immer die Grösse der negativen Dreiecksflächen sein mag, da ihre verticalen Ordinaten alle im selben Verhältnisse geändert werden, wenn man die negativen Flächen verschieden annimmt. Nennen wir diese Verticalen die linken und die rechten Verticalen der Spannweite. Wenn $i = 1$, wie in Fig. 11, so schneiden die linken und rechten Verticalen die Spannweite in drei gleiche Theile. Dieser Gegenstand wird vollständiger im Zusammenhang mit Fig. 13 behandelt werden.

Weiter wollen wir die Linie $t_1 t_1'$ die Drittelschlusslinie nennen. Man sieht, dass, was immer die verschiedenen Lagen der Tangente bt_1 sein mögen, die Ordinate dn, zwischen der Drittelschlusslinie und $t_1 q_1$ verlängert, unveränderlich ist, denn das Dreieck $t_1 q_1 t_1'$ ist unveränderlich, da es von der positiven Last und der Poldistanz allein abhängt. Durch Aehnlichkeit der Dreiecke folgt dann, dass Ordinaten wie lo' auf jeder angenommenen Verticalen unveränderlich bleiben; und sobald keine negative Last bei t_1 vorhanden ist, wird $bt_1 q_1$ gerade, o' fällt mit b und n mit p_1 zusammen. Aehnliche Beziehungen bestehen rechts von q_1. Die Grösse dp_1 ist eine Art Correction, welche von dem negativen Moment abgezogen werden muss, sobald der Träger horizontal an den Pfeilern befestigt ist, um das negative Moment zu finden, wenn die Tangente eine neue Lage annimmt, denn np_1 ist $= dn - dp_1$. Die negativen Momente können folglich aus der Drittelschlusslinie und den Tangenten an den Pfeilern gefunden werden, während die noch übrigen Linien $q_1 t_1$ und $q_1' t_1'$ die Richtigkeit der Arbeit controliren. Ehe wir diese Eigenschaften des Einsenkungspolygons und seiner Drittelschlusslinie auf einen continuirlichen Träger anwenden, ist es nöthig, einen geometrischen Satz aus Fig. 12 zu beweisen.

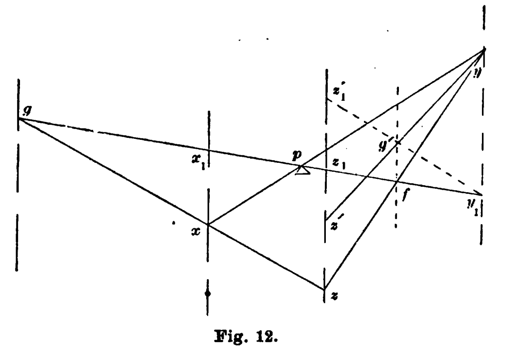


Fig. 12.

Es sei das veränderliche Dreieck der Art, dass die Seite xz immer durch den festen Punkt g geht, die Seite xy immer durch den festen Punkt p, und die Scheitel xyz immer in den Verticalen durch die gegenwärtigen Lagen von xyz liegen; dann hat vermöge der Eigenschaften homologer Dreiecke die Seite yz ebenfalls einen festen Punkt f in der geraden Linie gp. Wenn ferner ein Punkt z' in der Verticalen durch z liegt und dieselbe Entfernung von z behält, so gibt es auf der Linie yz' einen festen Punkt g', wo die Verticale durch f die Linie yz' schneidet; denn wenn z' seinen Abstand von z nicht ändert, so muss jeder andere Punkt wie g' beständig in derselben verticalen Distanz von f verbleiben, wie aus der Aehnlichkeit der Dreiecke erhellt. Da aber f fest ist, so ist es g' auch. Sobald z. B. das Dreieck xyz die Lage $x_1 y_1 z_1$ annimmt, rückt z' nach z_1'.

Wenden wir nun das Obige an auf die Untersuchung eines con-

tinuirlichen Trägers, der sich über drei Pfeiler $p'pp'$ erstreckt, wie Fig. 13 zeigt, in welcher die Längen der Oeffnungen zu einander im Verhältniss von 2 zu 3 stehen. Man theile die ganze Länge des Trägers in eine solche Anzahl gleicher Theile oder Felder ein, etwa 15, dass ein Theilpunkt auf den mittleren Pfeiler fällt; die Anzahl der Linien aa in jedem so erhaltenen Felde möge das Trägheitsmoment in ihm darstellen. Man nehme das Trägheitsmoment da, wo 3 Linien sind, wie bei a, a_4 u. s. w. als die Einheit oder I_0, dann ist $i = 1$ bei a, $i = \frac{3}{2}$ bei a_3, $i = \frac{3}{4}$ bei a_6' u. s. w.

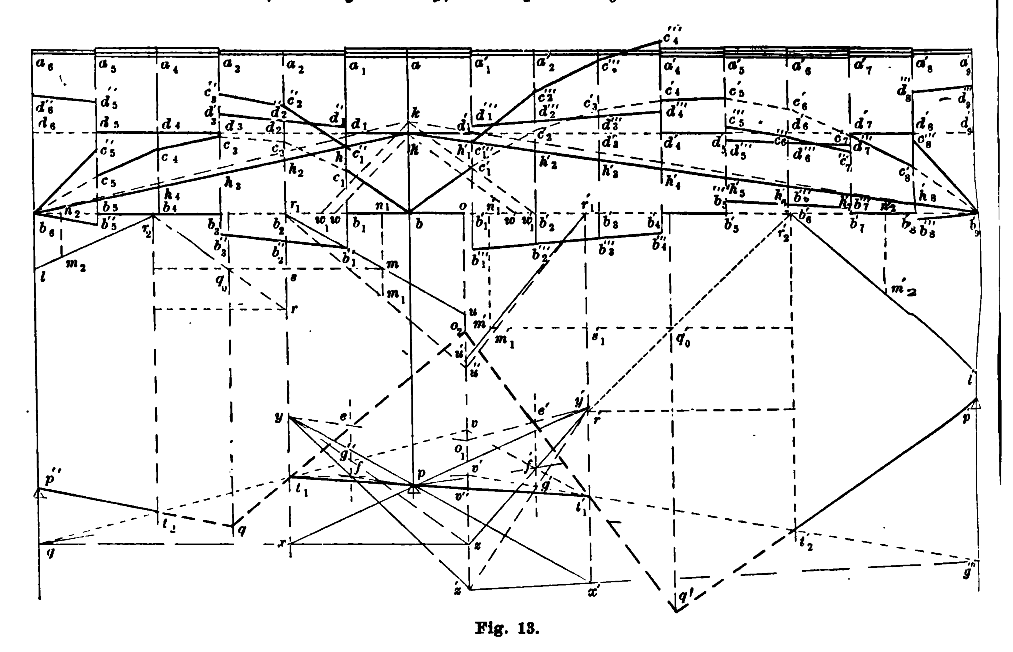


Fig. 13.

Die Polygone c und c' mögen die von den Belastungen in der linken und in der rechten Oeffnung resp. herrührenden Seilpolygone sein. Dann sind die Ordinaten vom Typus bc proportional zu M_0 in der linken Oeffnung. Die Fläche $bc_1c_1''c_2''c_3''c_3c_4c_5c_5''b_6$ ist die wirksame positive Momentenfläche in der linken Oeffnung und ihre Ordinaten sind proportional zu $M_0 i$. Ihr Schwerpunkt liegt, wie durch ein nichtgezeichnetes Seilpolygon gefunden wurde, in der positiven mittleren Verticalen qq_0. Eine ähnliche positive wirksame Momentenfläche zur Rechten hat ihren Schwerpunkt in der positiven mittleren Verticalen $q'q_0'$.

Nun nehme man irgend eine negative Fläche an, wie die zwischen den Linien b und d eingeschlossene und ziehe die Linien hb_6 und hb_9',

welche die negative Fläche jeder Oeffnung in rechte und linke Dreiecksflächen theilen. Es seien die Grössen von der Art hb proportional zu M_1, hd zu M_2, $h'b'$ zu M_1' u. s. w., dann sind die Ordinaten von $bb_1b_1''b_2''b_3''b_3b_5b_5''b_6h$ proportional zu M_1i, und der Schwerpunkt dieser Fläche liegt in der rechten negativen Verticalen t_1r_1. Aehnlich ist t_2r_2 die linke negative Verticale, welche den Schwerpunkt der linken wirksamen Momente enthält. In der rechten Oeffnung sind $t_1'r_1'$ und $t_2'r_2'$ die linken und rechten Verticalen. Wie zuvor angegeben, würden diese Senkrechten in ihrer Lage nicht verändert werden, wenn man die Lage der Linie d in irgend welcher Weise änderte; denn eine solche Aenderung der Lage würde alle Ordinaten in gleichem Verhältnisse ändern.

Suchen wir auch die Verticale, welche den Schwerpunkt der wirksamen Momentenfläche enthält, welche der wirklichen Momentenfläche b_6hb_9' entspricht. Man findet sie mittelst eines nicht gezeichneten Polygons als vo. Nennen wir vo die negative mittlere Verticale. Sie ändert sich nicht durch das Verrücken der Linie d. Wenn ein den wirksamen Momenten, wenn man sie als Lasten betrachtet, zukommendes Polygon gezogen wird, so müssen sich zwei seiner Seiten auf vo schneiden, weil es den Schwerpunkt angrenzender Lasten enthält. Nun möge rr_1 die Grösse $\Sigma(M_0i)$ vorstellen: es ist in der That ein Achtel der Summe der Ordinaten $b_1c_1 + b_1c_1''$ u. s. w. und folglich die Höhe eines Dreiecks mit einer Grundlinie gleich $\frac{4}{3}bb_6$, und einem Flächeninhalte gleich der wirksamen Momentenfläche in der linken Oeffnung. Ebenso ist $r'r_1'$ die Höhe eines Dreiecks mit derselben Grundlinie und einem Flächeninhalte gleich der wirksamen Momentenfläche in der rechten Oeffnung.

Wie früher erklärt, ist sr_1 der Betrag der rechten negativen wirksamen Momentenfläche in der linken Oeffnung, in derselben Weise gemessen, während sr derjenige zur Linken ist, wenn der Träger horizontal an den Pfeilern befestigt ist. Wir erhalten $s_1'r_1'$ und $s_1'r'$ in der rechten Oeffnung in ähnlicher Weise. Man nehme nun den willkürlichen Divisor $m = 1$, und die Poldistanz $r_1n_1 = EI_0 : n^2n'$. Dann ist, wie wir früher gesehen, wenn $mn_1 = sr_1$, ou der constante Abschnitt auf der negativen mittleren Verticalen zwischen der Drittelschlusslinie in der linken Oeffnung und einer Seite von der Art wie qt. Ebenso ist ou' ein ähnlicher constanter Abschnitt auf dieser Verticalen, welchen die rechte Oeffnung liefert. Man mache $r_2n_2 = r_1n_1$ und $n_2m_2 = sr$, so ist lb_6 ein ähnlicher unveränderlicher Abschnitt; desgleichen $l'b_9'$, welches auf dieselbe Weise erhalten wird.

Nun wurde die negative mittlere Verticale ov mittelst des Dreiecks b_6hb_9' erhalten, d. h. auf Grund der Annahme, dass das wirkliche Moment über dem Pfeiler dasselbe sei, ob es von der rechten oder der linken Seite des Pfeilers her bestimmt wird. Es ist offenbar, dass, so lange der Träger am mittleren Pfeiler horizontal befestigt ist, das Moment an diesem Pfeiler im Allgemeinen auf beiden Seiten an unendlich nahen Punkten verschieden ist, dass aber, wenn der Zwang entfernt wird, eine Ausgleichung stattfindet.

Da ou und ou' aus den positiven wirksamen Momenten abgeleitet sind, so folgt, dass die Momente an dem Pfeiler ausgeglichen sein werden, wenn die Tangente bei p in einer solchen Lage ist, dass die zwei Drittelschlusslinien auf ov eine Entfernung uu' abschneiden, und die zwei Linien vom Typus qt, verlängert, sich auf ov schneiden.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Lage der Tangente bei p zu bestimmen, welche bewirkt, dass dies wahr ist, indem wir die geeignete Lage der Drittelschlusslinien in beiden Oeffnungen suchen. Rücken wir die unveränderlichen Abschnitte in eine bequemere Lage, indem wir $o_1z = ou$ machen und $o_1z' = ou'$. Indem wir nun den willkürlichen Divisor $m = 1$ machten, wie wir thaten, wurden die Ordinaten des Einsenkungspolygons einfach zu D, d. h. sie sind in der Zeichnung von derselben Grösse, wie beim Träger, daher muss dem Höhenunterschiede zwischen $p''p$ und p' die wirkliche Grösse gegeben werden. Dieselbe kann nach Belieben vergrössert oder verkleinert werden, indem man m ändert.

Wir beabsichtigen nun, zwei feste Punkte g und g'' zu bestimmen, durch welche die Drittelschlusslinie in der linken Oeffnung gehen muss, und ähnlich g''' und g' für die rechte Oeffnung.

Wenn der Träger bei p' frei ist, so muss die Drittelschlusslinie, wie im Zusammenhang mit Fig. 11 gezeigt wurde, durch g gehen, wenn $gp'' = lb_6$. Man zeichne nun gz als Versuchslage der Drittelschlusslinie und vervollständige das Dreieck $xy'z$ wie in Fig. 12.

Dann ist xy' die Versuchslage der Tangente bei p, und da die Drittelschlusslinie in der rechten Oeffnung durch y' gehen und auf der negativen mittleren Verticalen einen Abschnitt $= uu'$ abschneiden muss, so ist dann $z'y'$ die entsprechende Versuchslage derselben. Aber wo immer gz gezogen werden mag, jede Linie, die eine Länge $= uu'$ abschneidet und $t_1'r_1'$ so schneidet, dass die Tangente durch p geht, muss durch den festen Punkt g' gehen, der wie in Fig. 12 beschrieben ist, gefunden wird. Deswegen geht die Drittelschlusslinie in der rechten Oeffnung durch g'. Aehnlich würden wir, wenn noch mehr

Oeffnungen rechts von diesen lägen, g' zur Bestimmung eines andern festen Punktes benutzen, wie wir g benutzt haben, um g' zu bestimmen.

Man construire nun g''' und g'' genau so wie g und g' gefunden wurden und ziehe die Drittelschlusslinien $t_1 t_2$ und $t_1' t_2'$. Wenn $t_1 t_2'$ durch p geht, so ist die Construction genau. Man mache $uu'' = vv''$, dann ist $n_1 m_1$ das negative wirksame Moment zur Linken und $n_1' m_1'$ das zur Rechten des Pfeilers.

Es sei bw die dem Dreiecke hbb_6 entsprechende wirksame Momentenfläche, in derselben Weise gemessen, wie die positive Fläche gemessen wurde, indem ein Achtel der Ordinate genommen ist, und es sei $bw_1 = n_1 m_1$, dann verhält sich das wirksame Moment bw_1 oder $m_1 n_1$ zu dem wirklichen ihm entsprechenden Moment bk, wie das wirksame Moment bw sich zu dem ihm entsprechenden wirklichen Moment bh verhält. Dasselbe Moment bk wird auch aus $n_1' m_1'$ durch eine analoge Construction rechts von b gefunden, was die Genauigkeit der Arbeit erprobt.

Noch sind mehrere andere Proben übrig, die wir kurz erwähnen wollen.

Man verlängere $p'' t_2$ bis q und $p' t_2'$ bis q', dann müssen qt_1 und $q' t_1'$ sich auf der negativen mittleren Verticalen bei o_2 so schneiden, dass $o_2 v'' = ou''$. Ebenso muss vv' gleich sein uu'. Ferner geht $t_1 v'$ durch f, und $t_1' v$ durch f'. Desgleichen schneidet yo_1 die Linie qo_2 auf der festen Verticalen fg'' bei e, und $y' o_1$ schneidet $q' o_2$ auf der festen Verticalen $f' g'$ bei e'. Dass das so sein muss, erhellt aus der Erwägung der Aenderungen, die während einer gedachten Drehung der Tangente $t_1 t_1'$ in die Lage xy' vorkommen.

Nachdem wir nun das Moment bk am Pfeiler bestimmt haben, sind kb_6 und kb_9' die wahren Schlusslinien der Momentenpolygone c und c'. Man nenne diese Schlusslinien k, so werden die Ordinaten kc die Biegungsmomente an den verschiedenen Punkten des Trägers darstellen. Die Inflexionspunkte sind da, wo die Schlusslinien die Polygone c und c' schneiden. Die Richtungen der Schlusslinien werden die sofortige Bestimmung der Widerstände an den Pfeilern und der Scheerkräfte an irgend einem Punkte gestatten.

Man sieht, dass der hauptsächlichste Unterschied zwischen den Constructionen im Falle eines constanten und in dem eines veränderlichen Trägheitsmomentes in der Lage der mittleren, positiven und negativen Verticalen und der rechten und linken Verticalen liegt.

Die kleine Aenderung in ihrer Lage, welche von dem Wechsel des Trägheitsmoments herrührt, ist die Rechtfertigung der früher gemachten Bemerkungen betreffs der nahen Annäherung der beiden Fälle.

Man sieht, dass das hier entwickelte Verfahren sich mit gleicher Leichtigkeit auf einen Träger mit einer beliebigen Anzahl von Oeffnungen anwenden lässt. Auch können, wenn das Trägheitsmoment allmählich wechselt, statt sprungweise, wie in Fig. 13 angenommen ist, die Felder kurz genug genommen werden, um mit hinreichender Genauigkeit diesen Fall näherungsweise zu behandeln.

Elftes Kapitel.

Der Satz von drei Momenten.

Die letzte Construction beruhte in Wirklichkeit auf dem Satze von drei Momenten; aber wenn die diesen Satz ausdrückende Gleichung in der gewöhnlichen Weise geschrieben wird, so ist die Verwandtschaft schwer zu sehen. In der That ist die Gleichung, wie sie von Weyrauch*) für den Träger mit veränderlichem Trägheitsmomente gegeben wird, so verwickelter Natur, dass der Versuch hoffnungslos scheint, mechanische Ideen mit den Ausdrücken der Gleichung in irgend welche klare Beziehungen zu bringen. Wir beabsichtigen, die Gleichung in einer ganz neuen Weise abzuleiten und auszudrücken, so dass sie sowohl leicht verständlich, als auch in Verbindung mit der letzten Construction leicht zu deuten sein wird.

Nehmen wir die allgemeine Gleichung für die Einsenkungen in der Form

$$D = \Sigma(Mx : EI), \quad \text{oder} \quad D \cdot EI_0 = \Sigma(Mix). \tag{7}$$

Hierin ist I das veränderliche Trägheitsmoment, I_0 ein gewisser besonderer Werth von I, der als Norm oder Einheit der Vergleichung angenommen wurde, $i = I_0 : I$, und x ist in horizontaler Richtung gemessen die Entfernung von dem Punkte als Ursprung, dem die Einsenkung D zukommt, bis zum Angriffspunkte des wirklichen Biegungsmoments M. Die Grösse Mi heisst das wirksame Biegungsmoment; und die Einsenkung D ist die Länge der Senkrechten vom Ursprung auf die Tangente zur Einsenkungscurve an dem Punkte, bis zu welchem die Summation sich erstreckt.

Nun betrachte man zwei angrenzende Oeffnungen eines continuirlichen Trägers mit mehreren Oeffnungen und bezeichne mit acb die Pfeiler, sodass c der mittlere Pfeiler ist. Es sei die Oeffnung $ac = l$

*) Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger. Von Jacob J. Weyrauch. Leipzig 1873.

und $bc = l'$. Man nehme den Ursprung bei a und erstrecke die Summation bis c, während man die Einsenkung bei a D_a nennt. Wenn der Ursprung bei b ist, und die Summation erstreckt sich bis c, so sei die Einsenkung D_b. Es seien ebenso y_a, y_b und y_c die Höhen bezüglich von a, b und c über einem gewissen gegebenen Niveau. Es ist dann leicht zu sehen, dass

$$D_a = y_a - y_c - lt_c,$$
$$D_b = y_b - y_c - l't'_c,$$

wenn t_c die trigonometrische Tangente des spitzen Winkels bei c auf der Seite gegen a ist, zwischen der Tangente der Einsenkungscurve bei c und der Horizontalen, und t'_c die trigonometrische Tangente des entsprechenden spitzen Winkels an der Seite von c gegen b.

Wenn wir die Gleichung (7) auf die Oeffnung l anwenden, so kann das Moment M als insgesammt aus drei Theilen bestehend angesehen werden: aus M_1, das von dem Moment M_a am Pfeiler a abhängig ist, M_0 von der Belastung in der Oeffnung l herrührend, und M_2 von dem Moment M_c beim Pfeiler c verursacht. M_1 und M_2 sind die Wirkungen von Lasten an irgend einem Punkte der Oeffnung, welche in anderen Oeffnungen als l ihren Angriffspunkt haben, oder von Zwang bei den Pfeilern a und c. Die Momente in der Oeffung l' können in ähnlicher Weise zerlegt werden.

Wir können dann die Gleichung (7), indem wir sie auf die gesammte Einsenkung an den Pfeilern anwenden, in folgender Form schreiben:

$$EI_0(y_a - y_c - lt_c) = \Sigma_c^a[M_0 + M_1 + M_2)ix] \qquad (8)$$
$$EI_0(y_b - y_c - l't'_c) = \Sigma_c^b[M_0' + M_1' + M_2')i'x'] \qquad (9)$$

in welchen Gleichungen x und x' von a und b beziehungsweise gegen c hin gemessen sind.

Wir wünschen jetzt die Werthe von M_1, M_2, M_1', M_2' durch M_a, M_b, M_c, M_c' auszudrücken.

Nun ist die Wirkung von M_a, welches Biegungsmoment von Lasten auf der von c abgewandten Seite von a herrührt, ein Moment M_1, welches von a nach c hin gleichmässig abnimmt. Dass M_1 so abnimmt, erhellt daraus, dass M_a ein Kräftepaar ist, welches im Gleichgewicht gehalten wird durch das Moment der verticalen Reaction, die es bei c verursacht; und das Moment einer verticalen Reaction bei c wächst gleichförmig von c gegen a hin.

Daher ist

$$M_1 = M_a x : l, \qquad M_2 = M_c(l - x) : l. \qquad (10)$$

Bestimmen wir nun eine Grösse $\bar{x}_1$ durch die Gleichung:

$$\bar{x}_1 = \Sigma_c^a(M_1 ix) : \Sigma_c^a(M_1 i), \tag{11}$$

so ist $\bar{x}_1$ die Entfernung von a, des Schwerpunktes der von den Momenten M_1 herrührenden wirksamen Momentenfläche. Der Schwerpunkt jeder derartigen Fläche kann graphisch gefunden werden, aber $\bar{x}_1$ findet sich sofort aus der letzten Gleichung zu

$$\bar{x}_1 = \int_c^a ix^2 dx : \int_c^a ixdx. \tag{12}$$

In ähnlicher Weise findet sich ein analog zu definirendes $\bar{x}_2$ durch die Gleichung

$$\bar{x}_2 = \int_c^a i(l-x)xdx : \int_c^a i(l-x)dx.$$

Es sei ferner i_1 bestimmt durch die Gleichung

$$i_1 = \Sigma_c^a(M_1 i) : \Sigma_c^a(M_1), \tag{13}$$

dann ist i_1 ein Durchschnittswerth für i für die von M_a abhängende Momentenfläche. Indem man nun durch Gleichung (10) M_1 eliminirt, erhält man

$$i_1 = \int_c^a ixdx : \int_c^a xdx \tag{14}$$

und ähnlich

$$i_2 = \int_c^a i(l-x)dx : \int_c^a (l-x)dx,$$

worin i_2 der durchschnittliche Werth von i für die von M_c abhängende Momentenfläche ist.

In ähnlicher Weise kann es zweckmässig sein, die Entfernung $\bar{x}_0$ von a für den Schwerpunkt der von der Belastung der Oeffnung l herrührenden wirksamen Momentenfläche einzuführen, wie auch den Durchschnittswerth i_0 von i für dieselbe Momentenfläche; aber es ist im Allgemeinen erst möglich, Integrale anzuschreiben, welche die Werthe von $\bar{x}_0$ und i_0 ausdrücken, nachdem die Vertheilung der Belastung und die Werthe von i gegeben sind. In jedem Falle werden sie durch Gleichungen von der Form von (11) und (13) ausgedrückt.

Wenn der Werth von i sprungweise variirt, so wird es nothwendig, die Grenzen der Integrale in (12) und (14) so zu theilen, dass wir

statt eines einzigen Integrals zwischen c und a die Summe von mehreren haben, von denen jedes sich über einen Theil der Oeffnung erstreckt, in welchem i sich stetig ändert.

Aus dem Obigen folgt weiter

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma_c^a(M_1) = \frac{1}{2} M_a l \\ \Sigma_c^a(M_2) = \frac{1}{2} M_c l\end{array}\right\} \qquad (15)$$

als die Ausdrücke für die M_a und M_c beziehungsweise zukommenden Momentenflächen. Aehnliche Gleichungen wie die von (10) bis (14) können auch für die Oeffnung l' angeschrieben werden. Mit Hülfe dieser Gleichungen können wir jetzt (8) und (9) schreiben:

$$\left.\begin{array}{l}EI_0(y_a - y_c - lt_c) = i_0\bar{x}_0\Sigma_c^a(M_0) + \frac{1}{2}l(M_a i_1 \bar{x}_1 + M_c i_2 \bar{x}_2) \\ EI_0(y_b - y_c - l't_c') = i_0'\bar{x}_0'\Sigma_c^b(M_0') + \frac{1}{2}l'(M_b i_1' \bar{x}_1' + M_c' i_2' \bar{x}_2')\end{array}\right\}. \qquad (16)$$

Es sei nun

$$t_c + t_c' = T, \qquad (17)$$

so ist T eine bekannte Constante, denn T ist der spitze Winkel zwischen den Oeffnungen l und l_1, wenn dieser Winkel klein genug ist, um ohne beträchtlichen Irrthum seiner trigonometrischen Tangente gleichgesetzt zu werden. Wenn der Träger gerade war, so war bei c, ehe Verbiegung eintrat, $T = 0$. Nun dividire man Gleichung (16) durch l und l' respective und addire, so folgt

$$EI_0\left[\frac{y_a - y_c}{l} + \frac{y_b - y_c}{l'} + T\right] = \frac{i_0\bar{x}_0}{l}\sum_c^a(M_0) + \frac{i_0'\bar{x}_0'}{l'}\sum_c^b(M_0')$$
$$+ \frac{1}{2}[M_a i_1 \bar{x}_1 + M_c i_2 \bar{x}_2 + M_c' i_2' \bar{x}_2' + M_b i_1' \bar{x}_1']. \qquad (18)$$

Gleichung (18) drückt den Satz von drei Momenten in seiner allgemeinsten Form aus. Die einzigen unbekannten Grössen darin für einen gegebenen Träger und gegebene Belastung sind die Momente an den Pfeilern.

Es sei $M_c - M_c' = C$, dann ist C das in beliebiger Weise beim Pfeiler c eingeführte Kräftepaar. Wenn kein solches Paar vorhanden ist, so ist $M_c = M_c'$, wie gewöhnlich der Fall.

Leiten wir nun aus (18) die Gleichung ab, welche den Satz von drei Momenten für den Fall eines geraden Trägers von gleichförmigen Querschnitten gibt. In diesem Falle ist $i = 1$, $T = 0$, $C = 0$ zu setzen. Nehmen wir an es sei M_0 verursacht durch verschiedene Gewichte P, die in Entfernungen z von a einwirken, dann ist das auf ein einzelnes Gewicht P am Punkte seiner Einwirkung kommende Moment

$$M_z = Pz(l - z) : l,$$

welcher Werth als die Höhe der dreieckigen Momentenfläche mit der Basis l angenommen werden kann, die von P herrührt. Dieses Dreieck, dessen Flächeninhalt $\frac{1}{2} M_z l$ ist, ist die P zukommende Componente von $\Sigma(M_0)$ und kann als concentrirtes Biegungsmoment an seinem Schwerpunkte in einer Entfernung x von a angebracht werden.

Nun ist $x = \frac{1}{3}(l + z)$, und wenn man alle Gewichte P zugleich nimmt, so ist

$$\Sigma_c^a (M_0 x) = \frac{1}{6} \Sigma_c^a [P(l^2 - z^2) z].$$

In Gleichung (18) haben wir in diesem Falle ferner

$$\bar{x}_1 = \tfrac{1}{3} l, \quad \bar{x}_2 = \tfrac{2}{3} l, \quad \bar{x}_1' = \tfrac{1}{3} l', \quad \bar{x}_2' = \tfrac{2}{3} l'$$

zu setzen und erhalten dann:

$$6EI\left\{\frac{y_a - y_c}{l} + \frac{y_b - y_c}{l'}\right\} - \frac{1}{l}\sum\nolimits_c^a \Big[P(l^2 - z^2)z\Big] - \frac{1}{l'}\sum\nolimits_c^b \Big[P'(l'^2 - z'^2)z'\Big]$$
$$= M_a l + 2 M_c (l + l') + M_b l'. \tag{19}$$

Diese Gleichung drückt dann den Satz von drei Momenten für einen Träger mit constantem Trägheitsmoment I aus, der durch Gewichte verbogen wird, welche in der Oeffnung l in Entfernungen z von a und in der Oeffnung l' in Entfernungen z' von b einwirken.

Nehmen wir auch den besonderen Fall der Gleichung (18), wenn das Trägheitsmoment unveränderlich und die Pfeiler auf gleicher Höhe sind. Dann ist $i = 1$, und wenn wir mit A_0 und A_0' die den Gewichten zukommenden positiven Momentenflächen bezeichnen, so haben wir

$$6\left(\frac{1}{l} A_0 \bar{x}_0 + \frac{1}{l'} A_0' \bar{x}_0'\right) = M_a l + 2 M_c (l + l') + M_b l'. \tag{20}$$

Diese Form des Satzes von drei Momenten wurde zuerst von Greene*) gegeben.

Der Vortheil, welcher gewonnen wird, indem man in diesen Satz die Biegungsmomente anstatt der einwirkenden Gewichte einführt, zeigt sich klar sowohl in der analytischen als in der graphischen Behandlung. Der höchst verwickelte Charakter der gewöhnlichen Formeln rührt daher, dass in ihnen die Gewichte selbst eingeführt sind. Um die analytische Lösung des Problems des continuirlichen Trägers in dem allgemeinen Falle der Gleichung (18) vollständig zu machen, benutzen wir nur die wohlbekannten Gleichungen:

---

*) Graphical Method for the Analysis of Bridge Trusses. Chas. E. Greene. Published by D. van Nostrand. New York 1875.

$$M = M_c + S_c z_0 - \Sigma_c^o (P z_0) \qquad (21)$$

$$S_c = \frac{1}{l} [M_a - M_c + \Sigma_c^a (P z)] \qquad (22)$$

$$S'_c = \frac{1}{l'} [M_b - M'_c + \Sigma_c^b (P z')] \qquad (23)$$

$$R_c = S_c + S'_c \qquad (24)$$

$$S = S_c - \Sigma_c^o (P). \qquad (25)$$

In (21) ist M das Biegungsmoment an irgend einem Punkte O in der Oeffnung l, S_c ist die von den Gewichten in der Oeffnung l herrührende Scheerkraft bei c, und z_0 ist der Abstand von O gegen c hin der einwirkenden Kräfte P und S_c im Segmente O_c.

Gleichung (22) wird aus (21) hergeleitet, indem O bei a genommen wird, und (23) wird auf ähnliche Weise in der Oeffnung l' erhalten. R_c ist die Reaction des Pfeilers bei c. S ist die Scheerkraft bei O in der Oeffnung l. Diese Gleichungen machen auch die Lösung der in (19) und (20) behandelten Fälle vollständig.

Zwölftes Kapitel.

Biegsamer Bogen und Versteifungsfachwerk.

Sobald das Trägheitsmoment eines elastischen Bogens so klein ist, dass er keinen genügenden Widerstand leisten kann, um den den Gewichten entsprechenden Biegungsmomenten das Gleichgewicht zu halten, können wir einen solchen Bogen einen biegsamen nennen.

Ein solcher muss einen genügenden Querschnitt haben, um der Zusammendrückung der Länge nach zu widerstehen, muss aber durch ein Fachwerk versteift werden, das am Zweckmässigsten gerade und horizontal ist. Der Bogen mag eine grosse Zahl von Gelenken haben die mit dem Fachwerke fest verbunden sein müssen, gewöhnlich durch senkrechte Stangen. Er ist alsdann vollkommen biegsam.

Wenn jedoch der Bogen durchweg ohne Gelenke ist oder Fugen hat, so kann er nichtsdestoweniger behandelt werden, als ob er vollkommen biegsam wäre, da diese Annahme annähernd genau und auf der Seite der Sicherheit sein wird; denn die in dem Fachwerke hervorgebrachten Biegungsmomente werden nahezu so gross sein, als wenn der Bogen vollkommen biegsam wäre im Falle dass dasselbe Gewicht eine weit grössere Einsenkung im Bogen als im Fachwerke verursacht. Es wird genügen, die Construction für den biegsamen Bogen ohne Zeich-

nung zu beschreiben, da die Ausführung derselben, nachdem die bereits gegebenen Constructionen verstanden sind, keine Schwierigkeit haben wird.

Tragen wir nach irgend einem angenommenen Maassstabe die einwirkenden Gewichte in einer Lastlinie auf und nennen wir diese senkrechte Lastlinie ww'. Zerlegen wir dann die Spannweite durch Verticalen in eine passende Anzahl gleicher Theile. Diese Verticalen werden die Curve a des Bogens in Segmente zerlegen. Von einem Punkte b als einem Pole ziehen wir ein Strahlenbüschel parallel zu den Segmenten von a und quer durch dieses Büschel eine verticale Linie uu' in solcher Entfernung von b, dass das Stück uu' auf ihr zwischen den äussersten Strahlen des Büschels gleich ww' ist. Dann sind die durch die Strahlen des Büschels gebildeten Segmente von uu' die Lasten, welche der Bogen kraft seiner Eigenschaften als Seilpolygon tragen würde und sie würden keine Biegungsmomente hervorrufen, wenn sie auf den Bogen einwirkten. Die wirklichen Lasten sind im Allgemeinen anders vertheilt. Nach Satz VII sind die im Fachwerke erzeugten Biegungsmomente diejenigen, welche von dem Unterschiede herrühren zwischen der wirklich auf dem Bogen an jedem Punkte ruhenden Last, und derjenigen die sich ergibt, wenn man die Gesammtlast, wie eben gezeigt wurde, mit Hilfe der Linie uu' zertheilt.

Nun zeichne man eine Lastlinie vv' mit den Gewichten, welche die Unterschiede der Segmente uu' und ww' sind, indem man sorgfältig die Vorzeichen dieser Unterschiede beachtet. Die algebraische Summe aller Gewichte vv' verschwindet, wenn die Gewichte eingeschlossen werden, die auf den Pfeilern ruhen, wie ein Blick auf die Construction im unteren Theile der Fig. 10 zeigt. Die oben beschriebene Construction wird von der in Fig. 10 in einem Punkte verschieden sein. Der Bogen wird im Allgemeinen nicht parabolisch sein, und die Lasten, die er vermöge seiner Eigenschaften als Seilpolygon trägt, werden daher nicht gleichförmig vertheilt sein, weshalb die Unterschiede, welche sich als die Belastung des Versteifungsfachwerkes ergeben, im Allgemeinen keine gleichförmig vertheilte Last ausmachen werden.

Der Horizontalschub des Bogens ist die Entfernung der Linie uu' von b nach dem Maassstabe gemessen, in dem die Lasten aufgetragen sind, und der Schub längs des Bogens an irgend einem Punkte ist die Länge des entsprechenden Strahles des Büschels zwischen b und uu'. Diese Schübe hängen einzig von dem getragenen Gesammtgewicht ab, während die Biegungsmomente des Versteifungsfachwerkes von der Art der Vertheilung desselben und der Gestalt des Bogens abhängen.

Nachdem so die auf das Versteifungsfachwerk einwirkenden Ge-

wichte bestimmt sind, ist dasselbe als ein gerader Träger, der Art und Weise entsprechend, in der es an den Pfeilern unterstützt wird, nach früher erklärten Methoden zu behandeln.

Die Wirkung des Temperaturwechsels ist eine Steigung oder Senkung des Scheitels des Bogens um einen Betrag, der sich leicht mit genügender Genauigkeit bestimmen lässt. (Siehe Rankine's „Applied Mechanics", Art. 169.) Diese Steigung oder Senkung des Bogens verursacht im Versteifungsfachwerke, das oben auf den Pfeilern befestigt ist, Biegungsmomente, welche eben so gross sind, wie wenn sie durch eine positive oder negative Belastung hervorgerufen würden, die dieselbe Senkung im Centrum verursachte und in derselben Weise wie die Segmente von uu' vertheilt wäre: denn so vertheilte Lasten oder Drucke kann der Bogen tragen oder ausüben. Eine ähnliche Reihe von Momenten kann im Versteifungsfachwerke dadurch hervorgebracht werden, dass man die Pfosten zwischen dem Bogen und dem Fachwerke verlängert.

Wenn diese Einsenkung und der Werth von EI in dem Fachwerke bekannt sind, so können diese Momente sofort nach Methoden, wie die bereits angewandten, construirt werden. Eine vernünftige Anwendung derartiger Abspreitzung ist sehr dienlich, um einem Baue das mitzutheilen, was wir ursprüngliche Steifheit nennen können, d. h. die Steifheit, die der Bau hat, wenn keine bewegliche Last darauf ist. Die St. Louiser Bogenbrücke ermangelt der ursprünglichen Steifheit so sehr, dass das Gewicht einer einzigen Person hinreicht, um ein beträchtliches Zittern über eine ganze Spannweite zu verursachen. Dieses wäre nicht möglich, wenn die Brücke aus einem Bogen bestände, der durch ein Fachwerk versteift ist, welches in den Pfeilern in einem solchen Zustande der Spannung verankert ist, dass es einen beträchtlichen Druck auf den Bogen ausüben kann. Diese Spannung des Fachwerkes würde während des Ueberganges einer beweglichen Last einigermassen vermindert werden.

Der Bogen mit Versteifungsfachwerk ist eine Constructionsart, nach welcher in früheren Tagen des amerikanischen Eisenbahnbaues viele Holzbrücken in Pennsylvanien erbaut wurden; aber seine Theorie scheint nicht von Allen verstanden worden zu sein, welche solche Brücken bauten, da die Versteifung selbst gewöhnlich stark genug gemacht wurde, um die einwirkenden Gewichte zu tragen, und der Bogen blos einer grösseren Sicherheit und Steifheit wegen beigegeben wurde, während statt der Verankerung des Fachwerkes in den Pfeilern und einer solchen Einrichtung, dass dasselbe einen Druck auf den

Bogen ausüben kann, eine davon weit verschiedene Vertheilung der Drucke angewandt wurde. Eine grosse Anzahl von Brücken nach diesem Muster sind von Haupt*) nach den Zeichnungen der Erbauer mitgetheilt worden; aber die meisten derselben zeigen durch die Art der Abspreitzung an den Pfeilern, dass die Ingenieure, welche sie entwarfen, es nicht verstanden, die Eigenthümlichkeiten dieser Combination vortheilhaft zu benutzen. Dieses erhellt fernerhin auch daraus, dass das Fachwerk in der Regel nicht continuirlich ist.

Ein gutes Beispiel einer solchen Combination, die nach richtigen Grundsätzen construirt ist, wird von Haupt auf Seite 169 ff. seiner Abhandlung sehr ausführlich beschrieben. Es ist eine hölzerne Brücke über den Susquehanna, 5½ (englische) Meilen von Harrisburg, auf der Pensylvania Railroad, und wurde von Haupt entworfen. Sie besteht aus 23 Oeffnungen, jede 160 Fuss lang von Pfeilermitte zu Pfeilermitte gemessen. Jeder der Bögen hat eine Spannweite von 149¼ Fuss und eine Pfeilhöhe von 20 Fuss 10 Zoll. Sie sind alle durch ein Fachwerk nach Howe's System versteift, welches continuirlich über die Pfeiler hinläuft und an ihnen befestigt ist. Die Brücke wurde im Jahre 1849 erbaut. Die gegen das Wetter geschützten Theile sind unversehrt geblieben, während andere Theile so oft, als sie durch Fäulniss zerstört waren, durch Stücke von den ursprünglichen Dimensionen ersetzt wurden. Obgleich nicht für den grossartigen Verkehr der gegenwärtigen Zeit berechnet, steht diese Brücke jetzt noch nach 28 Jahren des Gebrauches da als ein Beweis des wirklichen Werthes, den diese Combination für den Brückenbau hat.

Dreizehntes Kapitel.

Das Mauergewölbe.

Gewölbe aus Stein und Backstein haben Fugen, die bis zu einer gewissen Grenze unveränderlich, über diese hinaus jedoch nicht mehr stabil sind. Die Belastung und Gestalt des Gewölbes müssen daher einander so angepasst werden, dass diese Grenze nicht überschritten wird. Dieses wird sich im Laufe der Erörterung herausstellen.

Wählen wir zur Untersuchung das von Brunel bei Maidenhead in England errichtete Backsteingewölbe, welches als Viaduct für eine Eisenbahn dient.

*) Theory of Bridge Construction. Hermann Haupt, A. M. New York 1853.

Es hat die Gestalt eines elliptischen Ringes, wie in Fig. 14 dargestellt, mit einer Spannweite von 128 Fuss und einer Höhe von $24\frac{1}{4}$ Fuss. Die Dicke des Ringes am Scheitel ist $5\frac{1}{4}$ Fuss, während an den Pfeilern die horizontale Dicke 7 Fuss 2 Zoll beträgt.

Man zerlege die Spannweite in eine gerade Anzahl gleicher Theile nach Art von *bb* und beschreibe mit der Hälfte der Spannweite als Radius den Halbkreis *gg*. Man mache $ba = 24\frac{1}{4}$ Fuss, die Höhe der

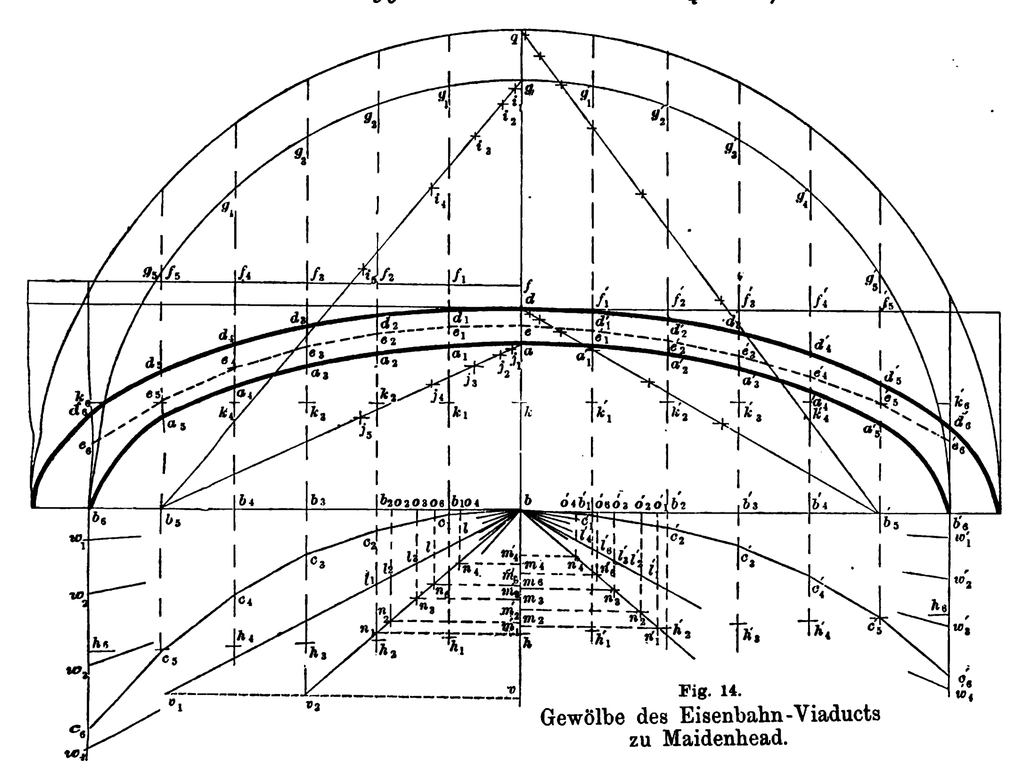


Fig. 14.
Gewölbe des Eisenbahn-Viaducts zu Maidenhead.

inneren Wölbfläche, und ziehe von irgend einem passenden Punkte auf der Linie *bb*, b_5 z. B., Linien nach *a* und *g*. Diese Linien werden es uns ermöglichen, die Ordinaten *ba* der Ellipse der inneren Wölbung aus den Ordinaten *bg* des Kreises zu finden, indem wir die letzteren im Verhältnisse von *bg* zu *ba* verkleinern. Z. B.: Man ziehe eine Horizontale durch g_3, welche b_5g bei i_3 schneidet; dann eine Verticale durch i_3, welche b_5a bei j_3 schneidet; dann wird, wie aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse erhellt, eine Horizontale durch j_3 die Ordinate a_3b_3 der Ellipse, welche der Ordinate b_3g_3 im Kreise entspricht, abschneiden.

Aehnlich sei bq = 64 Fuss + 7 Fuss 2 Zoll, und mit bq als Radius beschreibe man einen Halbkreis. Es sei bd = 24¼ Fuss + 5¼ Fuss die Höhe der äusseren Wölbung, und von irgend einem passenden Punkte auf bb, wie b_5', ziehe man Linien nach d und q. Diese gestatten es, die Ordinaten bd der Ellipse der äusseren Wölbfläche aus denen des Kreises zu finden, indem wir die letzteren im Verhältnisse von bq zu bd verkleinern. Durch dieses Verfahren können wir beliebig viele Punkte auf der inneren und äusseren Wölbfläche finden und dann diese Curven mit einem Curvenlineal zeichnen. Wir können den so erhaltenen Bogenring für unsere Construction verwenden, oder die Ordinaten mit irgend einer passenden Zahl multipliciren, falls der Bogen für bequeme Arbeit zu flach wäre. Ja wir können den halbkreisförmigen Ring selbst gebrauchen, wenn es wünschenswerth ist. Wir werden in dieser Construction den Bogenring ad verwenden, den wir eben erhielten.

Wir wollen annehmen, dass das Material der Hintermauerung zwischen der äusseren Wölbfläche und einer Horizontalen, die bei d den Bogen berührt, durch sein Gewicht einen verticalen Druck auf das Gewölbe ausübt. Dass diese Annahme in jedem Falle correct ist, wo dieser Theil der Maurerarbeit in der gewöhnlichen Weise ausgeführt ist, kann nicht wohl bezweifelt werden. Rankine jedoch nimmt in seiner „Angewandten Mechanik“ an, dass die Drucke in Stärke und Richtung den conjugirten Drucken eines homogenen elastischen Materials entsprechen, oder eines Materials wie Erde, dessen natürliche Böschung durch den Reibungswinkel bestimmt ist. Während dieses eine richtige Annahme ist für den Fall eines Tunnelgewölbes, welches Erde zu tragen hat, ist sie unrichtig für den vorliegenden Fall; denn das Mauerwerk des Ueberbaues bedarf zu seiner Unterstützung nur eines verticalen Widerstandes und übt selbst keinen Schub aus, der eine horizontale Componente hat.

Dieses erhellt ferner aus Moseley's Princip des geringsten Widerstandes, welches von Rankine mit den folgenden Worten ausgesprochen und bewiesen wird:

„Wenn die Kräfte, die einander in oder auf einem gegebenen Körper oder Bauwerk das Gleichgewicht halten, in zwei Systeme zerlegt werden, die a c t i v und p a s s i v genannt werden, und zu einander im Verhältnisse von Ursache und Wirkung stehen, so werden die passiven Kräfte die kleinsten Kräfte sein, die den activen Kräften das Gleichgewicht halten können, ohne dass der physikalische Zustand des Körpers oder des Bauwerks verändert wird.

„Denn die passiven Kräfte, welche durch Einwirkung der activen Kräfte auf den Körper oder Bau verursacht werden, werden nicht zunehmen, nachdem die activen Kräfte ihr Gegengewicht durch sie gefunden haben, und sie werden deswegen nicht über den geringsten Betrag hinaus zunehmen, der nöthig ist, um den activen Kräften das Gleichgewicht zu halten."

Ein Ueberbau aus Mauerwerk kann durch den verticalen Widerstand allein getragen werden und wird deswegen für sich selbst in keiner anderen Richtung einen Druck auf die Bogenschenkel ausüben. Nichtsdestoweniger wird dieser Ueberbau einen Widerstand gegen horizontalen Druck leisten, wenn solcher von dem Bogen selbst ausgeübt wird. Wenn wir daher annehmen, dass die vom Ueberbau herrührenden Drucke nur vertical seien, so verzichten wir bei dem Gewölbe auf ein Element der Stabilität, das möglicherweise angewandt werden kann, auf das sich aber der Ingenieur wohl nicht sehr gern verlassen wird wegen der geringen Qualität der Mauerarbeit, wie man sie gewöhnlich im Ueberbau antrifft. Die Schwierigkeit wird in der Regel vermieden, wie z. B. in jenem prachtvollen Baue der London Bridge, indem man ein umgekehrtes Gewölbe über die Pfeiler baut, welches jeden nöthigen Horizontaldruck auf die Bogenschenkel ausüben kann. Dadurch wird in Wirklichkeit die Dicke des Gewölbes bei und nahe bei den Pfeilern um so viel vermehrt.

Der Druck der Erde wird in Verbindung mit der Construction für Futtermauern besprochen werden. Wenn man die dort erhaltenen Drucke mit dem Gewichte combinirt, so findet man sofort die Last, welche ein Tonnengewölbe trägt, worauf dann das Seilpolygon gezogen und eine Construction ausgeführt werden kann, die in ihren allgemeinen Zügen derjenigen ähnlich ist, welche wir im vorliegenden Falle anzuwenden im Begriffe sind.

Nehmen wir an, es sei der Bogen mit einer beweglichen Last belastet, welche sich über die linke Hälfte der Spannweite erstreckt und eine Intensität besitzt, die, in Mauerwerk von demselben specifischen Gewicht wie das des Bogens ausgedrückt, dem Ueberbaue ein Stück von der Höhe df beifügen würde. Wenn nun die Anzahl der Theile, in die die Spannweite zerlegt wird, beträchtlich ist, so variiren die Gewichte, welche man sich an den Theilungspunkten concentrirt denken kann, ziemlich genau wie die Längen der Strecken von der Art af. Es wird sich ergeben, dass diese Annäherung für gewöhnliche Fälle hinreichend genau ist; wäre es jedoch wünschenswerth, die Construction vollständig genau zu machen und auch die

Wirkung der schiefen Lage der Fugen im Bogenringe zu berücksichtigen, so wird der Leser die Methode zur Auffindung des Schwerpunktes und zur Construction der Gewichte bei Woodbury*) finden, woselbst Poncelet's graphische Lösung des Bogens gegeben ist.

Mit beliebiger Poldistanz, z. B. mit der Hälfte der Spannweite, trage man die Gewichte auf. Wir haben b als Pol gebraucht und $b_6 w_1$ = der Hälfte des Gewichts am Scheitel $= \frac{1}{4}(af + ad) = b_6' w_1'$, $w_1 w_2 = a_1 f_1$, $w_2 w_3 = a_2 f_2$ u. s. w. gemacht. Mehrere der Gewichte in der Nähe der Enden der Spannweite sind in der Figur ausgelassen, nämlich $w_4 w_5$ u. s. w. Aus dem so erhaltenen Kräftepolygon leite man das Seilpolygon c ab wie früher erklärt wurde.

Dasjenige Seilpolygon, welches die wirklichen Beziehungen zwischen der Belastung und dem Schube längs des Bogens ausdrückt, ist offenbar eines, dessen Ordinaten zu den Ordinaten des Polygons c proportional sind.

Von Rankine, Woodbury und Anderen ist gezeigt worden, dass zum Zwecke vollständiger Stabilität — d. h. dass keine Fuge sich zu öffnen anfängt und dass jede Fuge über ihrer ganzen Fläche zusammengedrückt ist — der Angriffspunkt des resultirenden Druckes überall in das mittlere Drittel des Bogenringes fallen muss. Denn wenn an irgend einer Fuge der Druck an der äusseren oder an der inneren Wölbfläche die Grenze Null erreicht und gleichförmig bis zur andern Wölbfläche zunimmt, so wirkt der resultirende Druck am Ende des ersten Drittels der Fuge von der entfernteren Kante aus gerechnet.

Der Ort der Angriffspunkte des resultirenden Druckes in den einzelnen Fugen hat den Namen Druck- oder Stützlinie erhalten und ist offenbar das den Gewichten und dem wirklichen Schube entsprechende Seilpolygon. Wenn es somit möglich ist, eine solche Poldistanz und eine solche Lage des Pols zu benutzen, dass das Seilpolygon in das innere Drittel der Dicke des Bogenringes eingezeichnet werden kann, so ist der Bogen stabil. Es kann leicht vorkommen, dass dieses unmöglich ist, aber um hinreichende Stabilität zu sichern, sollte keine Vertheilung einer sich bewegenden Last möglich sein, in welcher diese Bedingung nicht erfüllt wird.

Wir können drei beliebige Punkte innerhalb dieses inneren Drittels annehmen und eine Projection des Polygons c durch dieselben gehen lassen und dann durch den Augenschein bestimmen, ob die ganze Projection innerhalb der vorgeschriebenen Grenze liegt. Um die Punkte

*) Treaties on the stability of the arch, pp. 405 seq.

so anzunehmen, dass ein neuer Versuch sehr wahrscheinlich unnöthig sei, beachten wir die wohlbekannte Thatsache, dass in Gewölben dieser Art die Stützlinie aller Wahrscheinlichkeit nach zuerst in der Nähe des Scheitels und in der Nähe der Schenkel über die vorgeschriebenen Grenzen hinausfällt. Nehmen wir e in der Mitte des Scheitels an, e_5' in der Mitte von $a_5'd_5'$, und e_5 nahe bei der unteren Grenze auf a_5d_5. Das letztere wird in der Nähe der unteren Grenze genommen, weil das Polygon auf der linken Hälfte stärker gekrümmt ist als auf der rechten und es somit irgendwo zwischen hier und dem Scheitel möglicherweise die obere Grenze erreichen kann. Dieselbe Betrachtung würde uns veranlasst haben, e_5' zur oberen Grenze zu erheben, wäre es nicht wahrscheinlich, dass ein solches Verfahren zur Folge haben könnte, dass das Polygon rechts von e_5' über die obere Grenze hinausginge.

Man ziehe die Schlusslinie kk durch e_5e_5' und die entsprechende Schlusslinie hh durch c_5c_5' und verkleinere alle Ordinaten nach der Art von hc im Verhältnisse von $hb:ke$ mit Hilfe der Linien bn und bl in einer Weise ähnlich der früher erklärten. Z. B. $h_3c_3 = n_3o_3$, und $l_3o_3 = k_3e_3$. Dadurch erhalten wir das Polygon e, von dem sich ergibt, dass es innerhalb der erforderlichen Grenzen liegt. Der Bogen ist dann stabil; aber ist das Polygon e die wirkliche Stützlinie? Könnte nicht eine andere Annahme über die drei Punkte, durch die es gehen soll, zu einem anderen Polygon führen, das ebenfalls innerhalb der richtigen Grenzen läge? Ganz gewiss wäre dies möglich. Welche von allen möglichen die erforderliche Bedingung erfüllenden Stützlinien gewählt werden muss, ist nach Moseley's Princip vom geringsten Widerstande zu bestimmen, welches, auf den vorliegenden Fall angewandt, uns zwingen würde, von allen innerhalb der erforderlichen Grenzen liegenden Curven diejenige zu wählen, welche den geringsten Horizontalschub, d. h. die kleinste Poldistanz hat. Es scheint nothwendig zu sein, hierauf besonders aufmerksam zu machen, da in einer vor Kurzem veröffentlichten Behandlung dieses Gegenstandes*) behauptet wird, dass die wahre Drucklinie diejenige sei, welche sich der Mitte des Bogenringes am meisten nähere, so dass der Druck an der am meisten zusammengedrückten Fugenkante ein Minimum sei; eine Behauptung, welche mit dem Satze vom geringsten Widerstande, wie er von Rankine bewiesen ist, im Widerspruch steht.

Um nun die besondere Curve zu finden, welche die geringste Pol-

*) Graph. Statics, A. J. Du Bois. New York 1875. p. 317.

distanz hat, ist es offenbar nothwendig, dass die Ordinaten dieser Curve so gross als möglich seien. Dieses lässt sich in folgender Weise sehr genau erreichen: Ueber e_1, wo das Polygon sich der oberen Grenze mehr nähert als an jedem andern Punkte in der Nähe des Scheitels, nehme man eine neue Lage von e_1 in der oberen Grenze an, und unterhalb e_4', wo es sich der unteren Grenze auf der rechten Seite am meisten nähert, nehme man eine neue Lage von e_4' in der unteren Grenze an. Zur Linken kann e_5 beibehalten werden. Lässt man nun das Polygon durch diese Punkte gehen, so wird es die zweite Bedingung erfüllen, welche von dem Princip des geringsten Widerstandes auferlegt wird.

Eine directere Methode, um das Polygon so zu construiren, dass es die verlangte Bedingung erfüllt, wird in Fig. 18 gegeben werden.

Wir sehen in dem vorliegenden Falle, dass die Veränderungen so klein sind, dass es nutzlos ist, diese neue Lage des Polygons und seinen Horizontalschub aufzusuchen. Der aus dem Polygon e in dessen gegenwärtiger Lage erhaltene Schub ist hinreichend genau. Der Horizontalschub wird in diesem Falle durch die Linien bn und bl gefunden. Da nun $2vv_2$ der Horizontalschub, d. h. die Poldistanz des Polygons c ist, so ist $2vv_1$ der Horizontalschub des Polygons e.

Wenn wir diese Poldistanz und eine richtige Lage des Pols angewandt hätten, so könnten wir vielleicht das Polygon e mit grösserer Genauigkeit als bei dem angewandten Verfahren ziehen; da aber dies das in Fig. 2, 3 u. s. w. angewandte Verfahren ist, so haben wir dies als Beispiel für eine andere Methode gegeben.

Die Fugen in dem Bogenringe sollten nahezu senkrecht zu der Richtung des Druckes sein, d. h. normal zu der Stützlinie.

In Bezug auf die Frage, was für ein Sicherheitscoefficient bei solchen Constructionen angemessen ist, würden alle Ingenieure darin übereinstimmen, dass das Material an der am meisten gefährdeten Kante nie einem Drucke grösser als ein Fünftel seiner äussersten Stärke ausgesetzt werden soll. In Folge der Art und Weise, wie der Druck nach unserer Annahme in den Fugen vertheilt ist, in welchen der Angriffspunkt der Resultirenden am Ende des ersten Drittels der Länge der Fuge von der Kante aus gerechnet liegt, beträgt die Intensität dieses Druckes an dieser Kante das Doppelte der durchschnittlichen Intensität des Druckes über die ganze Fuge. Wir kommen also zu dem Schluss, dass der Gesammtdruck an irgend einer Fuge, getheilt durch den Flächeninhalt der Fuge, wo dieser Druck ausgehalten wird, einen Quotienten geben soll, der wenig-

stens zehnmal so gross ist als der Druck, den das Material im äussersten Falle aushalten kann. Der Backsteinviaduct, den wir besprochen haben, ist insofern merkwürdig, als der angewandte Sicherheitscoefficient vielleicht der kleinste von allen bekannten bei ähnlichen Bauten gebrauchte ist, da er an der gefährdetsten Kante nur den Coefficienten $3\frac{1}{2}$ statt 5 hat.

Es mag in einem Falle, wie dem besprochenen, wünschenswerth sein, die während des Fortschreitens einer beweglichen Last vorkommenden Veränderungen zu erörtern, und um dies schneller zu vollführen, ist es zweckmässig, das der beweglichen Last zukommende Seilpolygon von dem der permanenten Last entsprechenden abgesondert zu zeichnen; das letztere kann ein für alle Mal gezeichnet werden, während das erstere, weil von einer gleichmässig vertheilten Last verursacht, mit Leichtigkeit für die verschiedenen Lagen der Last hergestellt werden kann. Die Polygone können sofort in ein einziges Polygon vereinigt werden, indem man die Ordinaten beider addirt, vorausgesetzt, dass sie, worauf wohl zu achten ist, dieselbe Poldistanz haben.

Falls die gegebene Construction zeigen sollte, dass der Bogen nicht stabil ist, da es keine Projection des Seilpolygons gibt, welche in das mittlere Drittel des Bogenringes eingeschrieben werden kann, ist es möglich, entweder die Gestalt des Bogens etwas zu verändern, oder dessen Dicke zu vermehren, oder die Vertheilung der Last zu verändern. Das letztere ist gewöhnlich das beste; denn die Gestalt ist meistens bereits nach Rücksichten der Zweckmässigkeit und des Geschmackes gewählt worden und die Dicke durch den Sicherheitscoefficienten bestimmt.

Wenn die Mittellinie des Bogenringes (oder irgend eine in das mittlere Drittel desselben eingeschriebene Linie) als ein Seilpolygon betrachtet wird und von einem Pole aus Linien parallel zu den Seiten dieses Polygons gezogen werden, so lässt sich eine Lastlinie finden, welche die für die Stabilität des Bogens nöthige Belastung darstellen wird. Wird diese Lastlinie mit der früher erhaltenen verglichen, so wird man alsbald sehen, wo eine fernere geringe Last zugelegt oder noch eine Höhlung in der Hintermauerung angebracht werden muss, um den Bogen stabil zu machen. Im Allgemeinen lässt sich bemerken, dass eine weitere Belastung die Krümmung der Drucklinie unter ihrem Angriffspunkte stärker macht, während die Entfernung einer Last den Curventheil unter der Last gerader werden lässt.

Die übrige Construction unterliegt keinen Beschränkungen und

kann auf alle unsymmetrischen Formen des Bogens oder der Belastung oder beider angewandt werden. Wie bereits erwähnt, ist eine ähnliche Construction auf alle Fälle eines Gewölbes anwendbar, das den Druck von Wasser oder Erde auszuhalten hat; in diesem Falle wirkt jedoch die Last nicht senkrecht ein, und die Lastlinie wird ein Polygon.

Vierzehntes Kapitel.

Futtermauern und Widerlager.

In Fig. 15 sei $aa'b'b$ der Querschnitt einer Mauer, die eine Erdmasse zurückhält, deren Oberfläche aa_6 ist. Nehmen wir nun an, dass

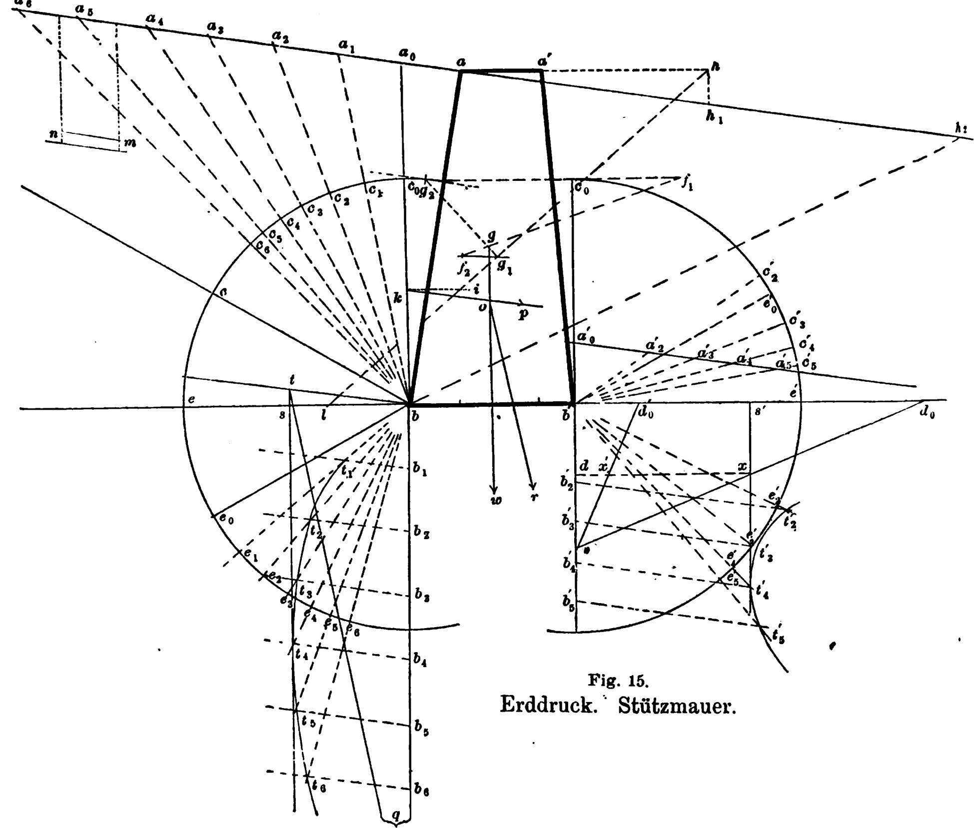


Fig. 15.
Erddruck. Stützmauer.

der Theil der Mauer und der Erde, den wir betrachten, von zwei Ebenen begrenzt sei, die parallel zu der Ebene des Papiers und um eine Einheit von einander entfernt sind: dann schneidet irgend eine

Ebene, welche durch die Kante der Mauer bei *b* geht, wie ba_0, ba_1 u. s. w., diesen Körper in einem Längsschnitte, welcher ein Rechteck ist, eine Breite von einer Einheit und eine Länge ba_0, ba_1 u. s. w. hat.

Die Resultirende des über irgend eines dieser Rechtecke nach Art von *ba* vertheilten Gesammtdruckes hat ihren Angriffspunkt am Ende des ersten Drittels dieser Entfernung von *b* aus, d. h. der von der Erde gegen das Reckteck ba_0 ausgeübte resultirende Druck wirkt in einer Entfernung $bk = \frac{1}{3} ba_0$ von *b*.

Dass die Resultirende ihren Angriffspunkt in diesem Punkte hat, ist die Folge der Thatsache, dass der vertheilte Druck gleichförmig zunimmt, wenn wir von irgend einem Punkte *a* der Oberfläche gegen *b* vorrücken. Der Mittelpunkt des Erddruckes ist dann, wie wohl bekannt, am angegebenen Punkte.

Ferner ist die Richtung der Drucke gegen eine verticale Ebene, wie die bei ba_0, parallel zur Oberfläche aa_5. Diese Thatsache wird gewöhnlich von Denjenigen übersehen, welche diesen Gegenstand behandeln und es werden willkürliche Annahmen in Bezug auf die Richtung des Druckes gemacht.

Dass der Erdschub gegen eine senkrechte Fläche parallel zur Oberfläche des Bodens ist, findet man analytisch bewiesen in Rankine's „Applied Mecanics" Seite 127. Der Beweis lässt sich in elementarer Weise darlegen, indem man das kleine Parallelepiped *mn* betrachtet, dessen obere und untere Fläche mit der Bodenoberfläche parallel sind. Da der Druck auf irgend eine mit der Bodenoberfläche parallelen Ebene von dem Gewichte der darüberliegenden Erde herrührt, so ist der Druck auf eine solche Ebene vertical und gleichmässig vertheilt. Wäre *mn* ein fester Körper, so würde derselbe durch diese verticalen Drucke im Gleichgewicht gehalten werden, welche deswegen ein im Gleichgewichte stehendes System von Kräften sind; da aber *mn* kein fester Körper ist, so muss es durch Drucke gehalten werden, die über jede Endfläche vertheilt sind, und diese Drucke müssen in derselben Weise an jedem Ende vertheilt sein, da beide gleichtief unter der Oberfläche liegen. Nun halten die senkrechten Drucke und die Enddrucke *mn* im Gleichgewichte, und bilden also ein System im Gleichgewichte. Da aber die Verticaldrucke für sich im Gleichgewicht sind, so bilden die Enddrucke allein ein System, welches für sich im Gleichgewichte ist. Damit dieses geschehe und kein Kräftepaar eingeführt werde, müssen sie einander direct entgegen, d. h. parallel zur Bodenfläche aa_5 wirken.

Man ziehe kp parallel zu aa_4, es stellt dann die Lage und Richtung des resultirenden Druckes auf die Verticale ba_0 dar. Man ziehe die Horizontale ki, dann heisst der Winkel ikp der Neigungswinkel des Druckes, da es der Winkel zwischen der Richtung des Druckes und der Normale zu der Ebene ist, auf welche der Druck wirkt.

Es sei $ebc = \varphi$ der Reibungswinkel, d. h. die Neigung, welche die Oberfläche des Bodens annehmen würde, wenn man die Mauer entfernte.

Die Neigung des von der Erde gegen irgend eine angenommene Ebene, wie ba_3 oder ba_4 ausgeübten Druckes darf den Reibungswinkel nicht übersteigen; denn wenn sich ein grösserer Neigungswinkel ergäbe, so würde das Erdprisma a_0ba_3 oder a_0ba_4 die Ebene ba_3 oder ba_4, an der sich ein solcher Neigungswinkel fände, hinabrutschen.

Für trockene Erde ist φ gewöhnlich ungefähr 30^0, für feuchte Erde und besonders für feuchten Thon kann φ bis auf 15^0 sinken. Die Neigung der Bodenoberfläche aa_4 kann nicht grösser sein als φ.

Man nehme nun die Punkte a_1, a_2, a_3 u. s. w. beliebig längs der Oberfläche an; der Bequemlichkeit wegen haben wir sie in gleichen Entfernungen angesetzt, was jedoch nicht wesentlich ist. Mit b als Centrum und irgend einem passenden Radius wie bc beschreibe man einen Halbkreis, welcher die Linien ba_1, ba_2 u. s. w. bei c_1, c_2 u. s. w. schneidet. Man mache $ee_0 = ec$, ebenso $e_0e_1 = c_0c_1$, $e_0e_2 = c_0c_2$ u. s. w. dann hat be_0 einen Neigungswinkel φ mit ba_0, wie auch be_1 mit ba_1, be_2 mit ba_2 u. s. w.; denn es ist $a_0be_0 = a_1be_1 = a_2be_2 = 90^0 + \varphi$.

Man trage nun bb_1, bb_2, bb_3, u. s. w. proportional zu den Gewichten der Erdprismen a_0ba_1, a_0ba_2, a_0ba_3 u. s. w. auf. Wir haben dieses mit der grössten Leichtigkeit dadurch bewerkstelligt, dass wir $a_0a_1 = bb_1$, $a_0a_2 = bb_2$, $a_0a_3 = bb_3$, u. s. w. machten. Durch b, b_1, b_2 ziehe man Parallele mit kp; diese werden be_0, be_1, be_2, u. s. w. in b, t_1, t_2, u. s. w. schneiden. Dann ist bb_1t_1 das Dreieck der Kräfte, welche das Prisma a_0ba_1 im Gleichgewicht halten, für den Fall, dass es gerade im Begriff ist, die Ebene ba_1 hinabzurutschen, denn bb_1 bezeichnet das Gewicht des Prismas, b_1t_1 ist die bekannte Richtung des Schubes gegen ba_0, und bt_1 ist die Richtung des Schubes gegen ba_1, wenn das Prisma gerade auf dem Punkte ist, zu rutschen: alsdann ist t_1b_1 der grösste Druck, welchen das Prisma gegen ba_0 ausüben kann. Aehnlich ist t_2b_2 der grösste Druck, welchen das Prisma a_0ba_2 ausüben kann. Nun ziehe man die Curve $t_1t_2t_3$ u. s. w., und eine verticale Tangente, welche die zu der Oberfläche Parallele durch b in t schneidet; dann ist tb der grösste Druck, den die Erde gegen ba_0 ausüben kann. Dieser

grösste Druck wird annähernd durch das Erdprisma oder den Erdkeil ausgeübt, der durch die Ebene ba_4 abgeschnitten wird; denn der Druck, welchen er gegen die verticale Ebene durch b ausübt, ist beinahe genau $b_4t_4 = bt$. So haben wir Coulomb's „Keil des Maximalschubes" in richtiger Weise gefunden. Frühere Bestimmungen desselben waren irrig, wenn die Oberfläche der Erdmasse nicht horizontal war, denn in jenem Falle hat man gewöhnlich nicht angenommen, dass die Richtung des Druckes parallel zu der Bodenoberfläche sei.

Im Falle dass die Bodenoberfläche horizontal ist, wird, wie sich analytisch nachweisen lässt, der Keil des Maximalschubes immer von einer Ebene abgeschnitten werden, die den Winkel cbc_0 halbirt; eine Thatsache, welche die Construction jenes Falles vereinfacht und uns in den Stand setzt, das Zeichnen der Schubcurve tt als unnöthig zu unterlassen.

Der Druck tb muss bei k einwirken und kann dahin streben, entweder die Mauer umzustürzen oder sie gleiten zu machen.

Um die Stabilität der Mauer bei einem solchen Drucke zu untersuchen, wollen wir das Gewicht der Mauer und des Erdprismas aba_0 suchen. Wir wollen annehmen, dass das specifische Gewicht des Mauerwerkes doppelt so gross sei, wie das der Erde. Man mache $a'h = bb'$ und ziehe hh_1 parallel ab, dann ist der Flächeninhalt $abb'a' = abh = abh_1$; und wenn $ah_2 = 2ah_1$, so stellt ah_2 das Gewicht der Mauer dar, und zwar in demselben Maassstabe, in dem die zuvor gebrauchten Erdprismen dargestellt wurden. Da aa_0 das Gewicht von aba_0 ist, so ist a_0h_2 das Gewicht der Masse zur Rechten der verticalen Ebene ba_0, gegen welche der Druck ausgeübt wird.

Man mache $bq = a_0h_2$ und ziehe tq, welches dann die Richtung und Grösse der Resultirenden darstellt, die an dem Punkte o angreifen muss, wo der bei k angreifende resultirende Druck die Verticale gw durch den Schwerpunkt g der Masse $aa_0bb'a'$ schneidet. Der Schwerpunkt g wird auf folgende Weise construirt. Man mache $a'h = bb'$, $bl = aa'$, und ziehe hl. Man verbinde auch die Halbirungspunkte von aa' und bb': die so gezogene Linie schneidet hl bei g_1, dem Schwerpunkt von $aa'b'b$. Man suche auch den Schwerpunkt g_2 von aba_0, welcher der Durchschnittspunkt von zwei Linien ist, von welchen eine parallel aa_0 ist und ba_0 in der Entfernung $\frac{1}{3}ba_0$ von a_0 schneidet, und die andere durch b geht und aa_0 halbirt. Durch g_2 und g_1 ziehe man Parallelen und trage g_2f_1 und g_1f_2 auf dieselben proportional zu den in g_1 und g_2 respective einwirkenden Gewichten ab. Wir haben es für zweckmässig gehalten, $g_2f_1 = \frac{1}{2}ah_2$, und $g_1f_2 = \frac{1}{2}aa_0$ zu machen. Dann

wird $g_1 g_2$ von $f_1 f_2$ im umgekehrten Verhältniss der einwirkenden Gewichte getheilt; und g, der Schnittpunkt, ist dann der verlangte Schwerpunkt.

Es sei die Linie or parallel zu tq; da sie bb' soweit innerhalb der Basis schneidet, so hat die Mauer genügende Stabilität gegen das Umkippen. Die Grundfläche der Mauer ist soviel grösser, als nothwendig ist für die Unterstützung des darauf ruhenden Gewichtes, dass es die Ingenieure nicht für nothwendig gehalten haben, dass der resultirende Druck die Grundfläche innerhalb des mittleren Drittels treffe. In der Praxis englischer Ingenieure darf, wie Rankine angibt, dieser Schnittpunkt sich b' bis zur Entfernung von $\frac{1}{8}bb'$ nähern, während französische Ingenieure ihn blos bis zu $\frac{1}{5}bb'$ nahe kommen lassen. Bei allen Fällen von Strebepfeilern, Brückenpfeilern, Kaminen und anderen Bauwerken, bei welchen ein Bruchtheil der äussersten Stärke des Materials oder des äussersten Widerstandes der Unterlage vom Betrage eines Zehntels oder Fünfzehntels ins Spiel kommt, sollte der Punkt dem b' nicht näher als $\frac{1}{3}bb'$ liegen.

Es sei ferner der Reibungswinkel zwischen der Mauer und der unter derselben befindlichen Erde φ': damit dann der Schub bei k nicht bewirkt, dass die Mauer rutscht, muss der Winkel wor kleiner als φ' sein.

Ist jedoch der Winkel φ' kleiner als wor, so wird es nothwendig, durch irgend welche Mittel mehr Stabilität zu gewinnen, wie z. B. indem man die Mauer unter die Oberfläche des davorliegenden Grundes einsenkt.

Es sei $a_0' a_5'$ die Erdoberfläche, welche einen passiven Widerstand gegen den Schub der Mauer ausüben soll: dann finden wir mittelst einer Methode, welche derjenigen genau analog ist, die eben angewandt wurde, um den grössten activen Druck zu finden, den die Erde gegen eine verticale Ebene ausüben kann, den geringsten passiven Druck, den die Erde vor der Mauer aushalten wird, ohne eine Ebene wie $b'a_3$ oder $b'a_4$ u. s. w. hinaufzurutschen. Der Unterschied in den beiden Fällen ist der, dass im ersteren Falle die Reibung die Erde verhinderte, die Ebene, worauf sie ruht, hinabzugleiten; während die Reibung sie jetzt verhindert, jene Ebene hinaufzurutschen.

Man mache $e'e_0' = ee_0$; und, indem man irgend welche Punkte $a_2', a_3' \ldots$ auf der Oberfläche des Erdkörpers annimmt, $e_0'e_2' = c_0'c_2'$, $e_0'e_3' = c_0'c_3'$ u. s. w.

Trägt man $b'b_2' = a_0'a_2'$ u. s. w. auf und zieht dann Parallelen durch b_2', b_3' u. s. w., so erhält man die Schubcurve $t_2't_3'$, u. s. w.

Das kleine Erdprisma zwischen $b'a_0'$ und der Mauer vergrössert

die Stabilität der Mauer, und kann, wenn verlangt, in die Construction eingeführt werden auf dieselbe Weise wie aba_0.

Die verticale Tangente durch s' zeigt uns, dass die Erde vor der Mauer einem Schube widerstehen kann, der eine horizontale Componente $b's'$ hat, wobei diese Linie mit dem Maassstabe zu messen ist, in welchem $b'b_2' = a_0'a_2'$ das Gewicht des Erdprismas $a_0'b'a_2'$ ist.

Dieser Maassstab ist verschieden von dem, den wir zur Linken gebrauchten. Um sie aufeinander zu reduciren, trage man die Entfernungen $b'd_0$ und $b'd_0'$ von b' aus ab, proportional zu den Senkrechten von b auf aa_4 und b' auf $a_1'a_4'$ respective. In dem vorliegenden Falle haben wir, da die Erdoberflächen parallel sind, $b'd_0 = ba_0$ und $b'd_0' = b'a_0'$ gemacht.

Dann ziehe man von irgend einem passenden Punkte auf $b'b_4'$, wie v, vd_0 und vd_0'; diese Linien dienen dann um von einem Maassstabe auf den andern überzugehen. Wir finden dann, dass $x'd$ der Schub nach dem Maassstabe zur Linken ist, der $xd = b's'$ zur Rechten entspricht, d. h. die Erde unter der zur Rechten angenommenen Oberfläche kann etwas über ein Viertel von dem Schube sb zur Linken aushalten.

Wir werden finden, dass ein gewisser kleiner Theil der Erde bei a_0' eine Schubcurve zur Linken von b' hat, aber da sie in unserer Lösung nicht nothwendig ist, so haben wir sie fortgelassen.

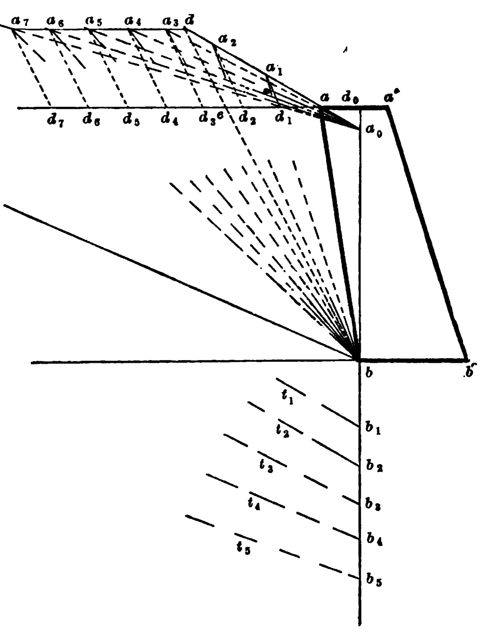


Fig. 16.

Ist es nöthig, dass irgend ein Druck, wie z. B. sb, in Pfunden gegeben werde, so wird derselbe folgendermassen gefunden: die Länge von ah_2 verhält sich zu der von sb, wie das Gewicht von $bb'a'a$ in Pfunden zu dem Druck sb in Pfunden.

Häufig ist die Bodenoberfläche keine Ebene, und ist dies der Fall, so besteht sie häufig aus zwei Ebenen ad, da_7 Fig. 16. In diesem Falle ziehe man eine passende Linie wie ad_7, und trage Stücke ad_1, d_1d_2, u. s. w. nach Belieben ab, welche wir

zur Bequemlichkeit gleich gemacht haben. Man ziehe $d_1 a_1$, $d_2 a_2$ u. s. w. parallel zu bd, und dann ba_1, ba_2, u. s. w., so sind die Dreiecke bda, bda_1, bda_2, bda_3 u. s. w. ihrem Flächeninhalte nach proportional zu den Linien ea, ed_1 u. s. w. Daher sind die Gewichte der Erdprismen baa_1, baa_2 u. s. w. proportional zu ad_1, ad_2 u. s. w. Im Fall ab rückwärts geneigt ist, ruht der Theil der Mauer zur Linken von der Verticalen ba_0 auf der darunter befindlichen Erde genügend, um denselben Druck auszuüben, der ausgeübt würde, wenn baa_0 ein Erdprisma wäre. Die Gewichte der Keile, die Drucke ausüben, und die unterhalb b aufgetragen werden müssen, sind dann proportional zu $d_0 d_1 = bb_1$, $d_0 d_2 = bb_2$ u. s. w. Die Richtung der Drucke der Prismen rechts von bd ist parallel zu ad, aber wenn man ein grösseres Prisma nimmt, so kann die Richtung für parallel zu $a_0 a_3$, $a_0 a_4$ u. s. w. angenommen werden, was sehr nahe richtig ist. Nun ziehe man bt parallel $a_0 a_1$, $b_4 t_4$ parallel $a_0 a_4$ u. s. w. und vollende die Construction für den Druck genau wie in Fig. 15, indem man als resultirenden Druck die Richtung und Grösse desjenigen gebraucht, der dem Keil des so erhaltenen Maximaldruckes zukommt.

Um nun die Stabilität der Mauer zu untersuchen, wird es nothwendig sein, das Gewicht und den Schwerpunkt der Mauer selbst minus einem Erdprisma baa_0 (statt plus dieses Prisma wie in Fig. 15) zu suchen; denn es wird jetzt von der hinter der Mauer befindlichen Erde gehalten.

Hat der Rücken der Mauer irgend eine andere Form als die oben behandelte, so sollte die verticale Ebene, gegen welche der Druck bestimmt wird, dennoch durch die hintere untere Kante der Mauer gehen.

Findet man, dass die Mauer wahrscheinlich auf ihrer Unterlage gleiten würde, wenn diese horizontal wäre, so wird oft eine schiefe Unterlage gebraucht, derart, dass sie beinahe senkrecht zu dem resultirenden Drucke auf die Grundfläche der Mauer ist. Die in Fig. 15 angewandte Construction ist auch in diesem Falle zu brauchen.

Die Untersuchung der Stabilität irgend eines Widerlagers, Strebepfeilers oder Pfeilers gegen Kippen oder Rutschen ist dieselbe wie die der Futtermauer in Fig. 15. Sobald die Grösse, die Richtung und der Angriffspunkt des auf ein solches Bauwerk ausgeübten Druckes bestimmt ist, muss er genau so behandelt werden, wie der resultirende Druck kp in Fig. 15.

Bei einer Mauer oder einem Damme an einem Wasserreservoir wird die Construction dadurch vereinfacht, dass, da die Oberfläche des Wassers horizontal ist und der Reibungswinkel verschwindet, der resultirende Druck senkrecht ist zu der Fläche, auf die das Wasser drückt.

Es ist von Nutzen, dies als einen Fall unserer vorhergehenden Construction zu untersuchen. In Fig. 17 sei abb' der Durchschnitt des Dammes; dann wird der Keil des Maximaldruckes gegen ba_0 durch die Ebene ba_1 abgeschnitten, wenn $cba_1 = 45^0$, d. h. wenn, wie vorher gesagt, ba_1 den Winkel cba_0 halbirt.

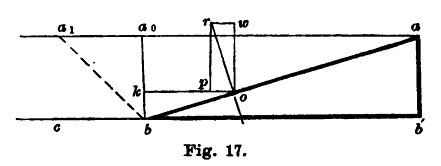


Fig. 17.

Dies bringt einen horizontalen resultirenden Druck in k hervor, der gleich ist dem Gewichte des Keiles. Nun ist der Gesammtdruck auf ab die Resultirende dieses Druckes und des Gewichts des Keiles aba_0. Die Kräfte, die zusammengesetzt werden müssen, sind also proportional mit den Linien $a_1a_0 = bv_0$ und aa_0. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ist ersichtlich, dass die Resultirende ro. senkrecht auf ab steht.

Man sieht, dass man, indem man die Neigung von ab klein macht, die Richtung von ro der Senkrechten so nahe bringen kann, dass der Damm allein durch den Druck des Wassers an seinem Orte gehalten wird, selbst wenn derselbe ein hölzerner Bau wäre, dessen Gewicht ausser Acht gelassen werden kann.

Wir können nun die wirklichen Drucke, denen das Gewölbe eines oben mit Wasser oder Erde belasteten Tunnels unterworfen ist, construiren. Nehmen wir z. B. an, wir wollten den Druck einer solchen Belastung auf den Wölbstein $a_4d_4d_5a_5$ Fig. 14 finden. Man suche den resultirenden Druck gegen eine verticale Ebene, die sich von d_5 bis zu der oberen Fläche der Last erstreckt und nenne ihn p_5. Man ziehe dann eine Horizontale durch d_4 und nenne deren Schnittpunkt mit der soeben erwähnten Verticalen d_5''. Dann suche man den resultirenden Druck gegen eine sich von d_5'' bis zur Oberfläche erstreckenden verticalen Ebene und nenne ihn p_5'. Endlich mache man $p_5'' = p_5 - p_5'$ und lasse es an einem solchem Punkte von d_5d_5'' einwirken, dass p_5 die Resultirende von p_5' und p_5'' wird. Dann wird der resultirende Druck gegen den Wölbstein die Resultirende von p_5'' und dem Gewichte des Theiles der Belastung sein, der gerade über ihm liegt.

In die Erde eingesenkte Fundamente.

Eine ähnliche Methode, wie die, welche wir bei der Bestimmung des Erddruckes gegen eine Futtermauer oder ein Tunnelgewölbe angewandt haben, wird uns in den Stand setzen, die Stabilität der Fundirung einer in der Erde stehenden Mauer zu untersuchen.

Wir nehmen an, dass $abb'a'$ in Fig. 15 ein gemauertes Fundament ist, und dass der Druck, den es auf die Ebene bb' ausübt, vertical ist,

indem er von seinem Eigengewichte und dem des Gebäudes, oder der anderen Last die es trägt, herrührt. Nun betrachte man eine verticale Ebene von der Höhe einer Einheit, wie z. B. bb_1; und bestimme den resultirenden Druck gegen dieselbe unter der Voraussetzung, dass der Druck durch eine zur Rechten gelegene Erdschicht hervorgebracht wird, welche genügt, um denselben verticalen Druck auf bb' auszuüben, den die Mauer und deren Belastung wirklich hervorbringen. Mit anderen Worten: wir nehmen an, dass die Mauer mit Belastung durch eine Erdmasse ersetzt ist, deren obere Fläche horizontal ist und die so viel wiegt, wie die Mauer mit Belastung. Man nenne die obere Fläche z und suche den Druck gegen die verticale Ebene zb, der von der Erde unter der genannten Fläche herrührt; ebenso suche man den Druck auf zb_1. Da die Oberfläche wagerecht ist, so wird, wie früher gesagt, der Maximaldruck von einem Keil ausgeübt, dessen eine Grenzfläche den Winkel zwischen bz und einer andern Ebene halbirt, welche durch b mit einer Neigung gleich dem äussersten Reibungswinkel φ gelegt ist. Dies setzt uns in den Stand, den Horizontaldruck auf zb und zb_1 direct zu finden: ihr Unterschied ist der resultirende active Druck gegen bb_1.

Demnächst muss bestimmt werden, welchen passiven Druck die Erde zur Linken von bb_1 aushalten kann. Der passive Widerstand der Erde unter der Oberfläche a gegen die Ebene ab, wie auch der gegen die Ebene a_1b kann genau so gefunden werden, wie der Widerstand der Erde unter der Oberfläche a' früher gefunden wurde. Der Unterschied dieser Widerstände ist der Widerstand, den bb_1 aushalten kann. In der That könnte bb_1 diesem Drucke widerstehen, selbst wenn der active Druck gegen ab an den Grenzen seines Widerstandes wäre, was er nicht ist. Der wirklich gegen bb_1 ausgeübte Druck ist dann soweit innerhalb der Grenzen der Stabilität, dass gemeiniglich kein weiterer Sicherheitscoefficient nothwendig wird; und die Stabilität des Grundbaues ist gesichert, wenn der active Druck auf bb_1 den passiven Widerstand nicht überschreitet. Diese Construction sollte auf Grundlage des kleinsten Reibungswinkels φ gemacht werden, den die Erde annimmt, wenn sie nass ist, da dieser kleiner als für trockene Erde ist, und daher einen grösseren activen Druck zur Rechten und einen kleineren Widerstand zur Linken gibt.

Fünfzehntes Kapitel.

Kugelförmige Metallkuppel.

Die Kuppel, welche in der folgenden Construction behandelt werden wird, ist halbkugelförmig von Gestalt; aber die vorgeschlagene Construction lässt sich gleichfalls auf Kuppeln von irgend einer andern

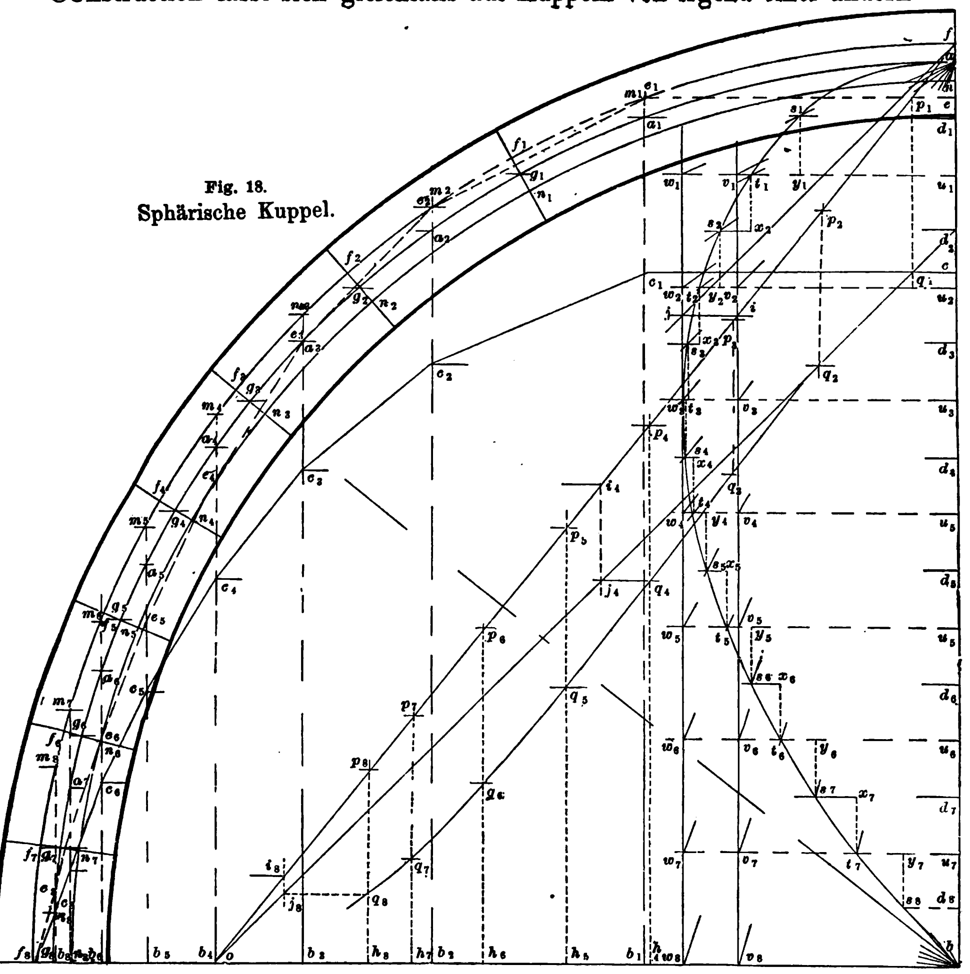


Fig. 18.
Sphärische Kuppel.

Form anwenden, wenn dieselbe nur durch Umdrehung eines Curvenbogens um eine verticale Axe erzeugt wird. Solche Formen sind die elliptische, parabolische oder hyperbolische, sowie auch spitzige oder gothische Kuppel, u. s. w. Der Quadrant *aa* in Fig. 18 stelle den Theil des Meridianschnittes einer dünnen metallenen Kuppel dar,

zwischen dem Scheitel und dem Anfangskreise. Wir nehmen an, die metallene Kuppel sei so dünn, dass es nicht nöthig ist, ihre Dicke in der Figur darzustellen; die Dicke einer Kuppel von Mauerwerk jedoch ist eine Sache von grösster Wichtigkeit, die im Folgenden behandelt werden wird.

In einer dünnen metallenen Kuppel findet der einzige Schub längs eines Meridianschnittes nothwendiger Weise in einer Richtung statt, die an jedem Punkte die Schnittcurve berührt. Diese Betrachtung wird uns in den Stand setzen, diesen Schub zu bestimmen, sowie auch die Zug- oder Druckspannungen längs irgend eines der konischen Ringe, in die man sich die Kuppel durch eine Reihe von horizontalen Ebenen zerlegt denken kann.

Man theile die Höhe ab der Kuppel in eine beliebige Anzahl von Theilen, welche wir in diesem Falle der Bequemlichkeit wegen gleich gemacht haben. Man nehme diese gleichen Theile nach der Art von du als die Entfernungen zwischen horizontalen Ebenen an, so dass die Ebenen durch die Punkte d_1, d_2 u. s. w. kleine Kreise aus der Halbkugel ausschneiden, die durch die Punkte a_1, a_2, u. s. w. gehen, und dass ähnlich die Ebenen durch u_1, u_2, u. s. w. kleine Kreise ausschneiden, die durch g_1, g_2, u. s. w. gehen. Nun nehme man an, die Dicke dieser Kuppel sei überall dieselbe; wenn dann ab das Gewicht eines Segmentes der Kuppel vorstellt, zwischen zwei Meridianebenen, die einen kleinen Winkel miteinander bilden, so folgt aus dem bekannten Ausdruck für den Flächeninhalt einer Kugelzone, dass ad_1 das Gewicht des über $a_1 d_1$ gelegenen Theiles des Segmentes darstellen wird. Aehnlich ist au_1 das Gewicht des Segmentes ag_1; ad_2 das Gewicht von aa_2 u. s. w.

Dieses Verfahren, um das Gewicht zu erhalten, ist natürlich nur anwendbar im Falle dass die Kuppel eine Kugelhaube, kleiner als eine Halbkugel, und überall von gleicher Dicke ist. Wenn die Dicke von dem Scheitel an zunimmt, so nehmen die Gewichte der durch gleichweit entfernte Horizontalebenen abgeschnittenen Zonen genau wie die Dicke zu. Im Falle dass die Kuppel nicht kugelförmig ist, müssen die Gewichte durch ein Verfahren bestimmt werden, das der Form der Kuppel und dem Wechsel in der Dicke angepasst ist.

Nun wird das Gewicht des Segmentes aa_1 von einem Horizontalschub getragen, der sich aus dem Horizontaldrucke in den Meridianebenen, durch welche das Segment begrenzt wird, und wie früher bemerkt, aus einem Schub in der Richtung der Tangente bei a zusammensetzt. Man ziehe eine horizontale Linie durch d_1, und durch a eine zu der Tangente bei a_1 Parallele: diese schneiden sich bei s_1, dann ist $ad_1 s_1$ das Dreieck der Kräfte, die das Segment aa_1 im Gleichgewicht halten.

Aehnlich ist $au_1 t_1$ das Dreieck der Kräfte, die das Segment ag_1 im Gleichgewicht halten u. s. w. Man ziehe eine Curve st durch die so bestimmten Punkte. Dies ist eine wohlbekannte Curve des dritten Grades, welche auf ba als die Axe von x und auf bg_8 als die von y bezogen, die Gleichung hat

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{r - x}{r + x}.$$

Verfolgt man sie zur Rechten von a, so hat sie, eine Schleife bildend, in dem anderen Quadranten der Kuppel einen Theil wie der hier gezeichnete; sie geht durch b unter einer Neigung von 45^0, und die beiden Zweige unterhalb b haben als Asymptoten eine horizontale Linie, die den Kreis aa der Kuppel berührt. Die Curve hat folgende bemerkenswerthe Eigenschaft: Wenn irgend eine Linie von a gezogen wird, welche die hier gezogene Curve schneidet und auch den Theil unterhalb bg_8, so ist das Product dieser zwei „Radii vectores" der Curve von dem Pole a constant und der Ort des Schnittpunktes der Normale bei diesen zwei Punkten ist eine Parabel.

Man ziehe eine verticale Tangente zu dieser Curve: der Berührungspunkt ist sehr nahe bei t_3, und g_3, der correspondirende Punkt der Kuppel, ist um beinahe 52^0 vom Scheitel a entfernt. Eine Bestimmung dieses Maximalpunktes mittelst der Gleichung der Curve liefert als Höhe desselben oberhalb b: $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)r$, was etwa $51^0\,49'$ entspricht. Nun betrachte man irgend einen Ring, wie z. B. den, dessen Meridianschnitt $g_1 a_2$ ist: die obere Kante ist einem Schub unterworfen, dessen radiale horizontale Componente proportional zu $u_1 t_1$ ist, während der Horizontalschub gegen seine untere Kante proportional zu $d_2 s_2$ ist; der Unterschied $s_2 x_2$ zwischen diesen radialen Kräften bringt eine Zusammendrückung proportional zu $s_2 x_2$ in dem Ringe längs seines Umfangs hervor. Man wird sehen, dass diese Unterschiede, welche von der Art von sx oder ty sind, das Vorzeichen bei t_3 wechseln. Daher sind alle Parallelkreise der Kuppel oberhalb $51^0\,49'$ von dem Scheitel comprimirt, während alle darunter dilatirt sind; der Kreis, welcher dem Winkel $51^0\,49'$ entspricht, befindet sich in seinem natürlichen Zustande. Dies lässt sich so ausdrücken: eine dünne Kuppel von Mauerwerk wird in Folge einer Pressung in den Ringen bis zu $51^0\,49'$ von dem Scheitel stabil sein, darunter aber nicht mehr, weil sie längs seiner Meridianschnitte bersten könnte. Eine dicke Kuppel von Mauerwerk jedoch hat den resultirenden Schub nicht an jedem Punkte ihres Meridianschnittes in einer zu ihrer Oberfläche tangentialen Richtung; dies wird später besprochen werden.

Es ist nothwendig, die wirkliche Spannung oder Pressung in irgend einem Ringe zu bestimmen, um danach die Dicke so bemessen zu können, dass das Metall keiner zu heftigen Anstrengung unterworfen werde.

Die Regel, um die Ringspannung zu erhalten, lautet: Man multiplicire die Intensität des radialen Druckes mit dem Radius des Ringes, das Product wird die Spannung des Ringes bei irgend einem Meridianschnitte sein. Die Richtigkeit dieser Regel erhellt sofort aus der Betrachtung des Flüssigkeitsdruckes in einer Röhre, wo man findet, dass die Spannungen an den beiden Enden eines Durchmessers den Gesammtdruck in jenem Durchmesser daran verhindern, die Röhre zu zerreissen.

Nun ist in dem vorliegenden Falle $t_1 y_1$ die längs eines gewissen Segmentes vertheilte radiale Kraft. Die Anzahl der Grade, aus welchen das Segment besteht, ist bis jetzt unbestimmt; wir wollen nun annehmen, sie sei so gross, dass die gesammte radiale gegen das Segment wirkende Kraft gleich der Ringspannung ist. Nennen wir die gesammte radiale Kraft P und die Ringspannung T, dann muss das Segment so gross sein, dass $P = T$ wird. Auch sei θ die Anzahl von Graden in dem Segmente, dann ist $90^0 : \theta$ die Anzahl von Segmenten in dem Viertel der Kuppel, und $90 P : \theta$ ist die radiale Kraft gegen dieses Viertel, welche durch $\frac{1}{2}\pi$ getheilt werden muss, um die Ringspannung zu erhalten; denn wenn p die Intensität des radialen Druckes ist, so ist $\frac{1}{2}\pi r p$ der Gesammtdruck gegen einen Quadranten, und rp ist, wie früher gesagt, die Ringspannung. Das Verhältniss dieser ist $\frac{1}{2}\pi$ und durch dieses Verhältniss müssen wir den gesammten radialen Druck in jedem Falle dividiren, um die Ringspannung zu erhalten. Folglich ist

$$\frac{180 P}{\theta \pi} = T, \quad \theta = \frac{180^0}{\pi}.$$

Soll $P = T$ sein, so muss $\theta = \frac{180^0}{\pi}$ = beinahe $57^0.3$ gross sein.

Dies ist die Anzahl von Graden, aus denen das Segment bestehen muss, damit, wenn ab sein Gewicht darstellt, $t_1 y_1$ die Ringspannung in dem Meridianschnitte $a_1 g_1$ sei. Der Ausdruck, den wir gefunden haben, ist unabhängig von dem Radius des Ringes, und gilt deshalb für irgend einen anderen Ring wie $g_1 a_2$, worin $s_2 x_2$ die Ringspannung ist u. s. w. Um zu finden, welcher Bruchtheil der ganzen Kuppel dieses Segment ist, dividire man θ durch 360^0 und findet dann

$$\frac{\theta}{360} = \frac{180}{360 \pi} = \frac{1}{2\pi} = \frac{4}{25} \text{ beinahe;}$$

woraus der Maassstab der Gewichte leicht gefunden werden kann; W sei das Gesammtgewicht der Kuppel und r deren Radius, dann ist

$$2\pi r : W = 1 : n,$$

wo n das Gewicht per Einheit oder die Ringspannung in der Einheit der Entfernungen ty oder sx bezeichnet.

Entfernungen wie at oder as stellen in demselben Maassstabe den tangentialen Schub in der Richtung der Meridianschnitte dar, der gleichförmig über einen Bogen von 57°.3 vertheilt ist; wenn wir z. B. at_2 als Kraft gemessen durch $\theta \times u_2 g_2$ als Entfernung gemessen theilen, so werden wir die Intensität der Meridiancompression an dem durch eine horizontale Ebene durch a_2 gebildeten Schnitte erhalten.

Analoge Constructionen gelten für Kuppeln, die nicht kugelförmig und nicht von gleichmässiger Dicke sind. Annähernde Resultate können dadurch erhalten werden, dass man eine kugelförmige Kuppel oder eine Reihe von Kugelzonen annimmt, die sich der Gestalt nähern, welche man behandeln will.

Sechzehntes Kapitel.

Kugelförmige Kuppel von Mauerwerk.

Die behandelte Kuppel sei die in Fig. 18, wo die gleichmässige Dicke des Mauerwerks ein Sechzehntel des inneren Durchmessers oder ein Achtel des Radius der inneren Wölbfläche ist. Man theile ab, den Radius der inneren Linie, in eine passende Anzahl von gleichen Theilen, acht z. B., bei u_1, u_2 u. s. w.; eine viel grössere Anzahl würde bei wirklicher Construction vorzuziehen sein. Durch die Punkte g_1, g_2, u. s. w. auf gleicher Höhe mit u_1, u_2, u. s. w. ziehe man konische Fugen normal zu der Kuppel, so dass b der Scheitelpunkt jedes der Kegel ist.

Wenn wir ein Segment zwischen Meridianebenen, die einen kleinen Winkel mit einander bilden, betrachten, so liegt der Schwerpunkt der Theile des Segmentes zwischen den konischen Fugen bei g_1, g_2, u. s. w. auf den Horizontalen in der Mitte zwischen den früheren Horizontalen. Diese Punkte sind nicht genau auf der Mittellinie aa, aber wenn die Anzahl von Horizontalen gross ist, so ist der Unterschied nicht von Bedeutung. Wir nehmen an, sie liegen auf aa. Dass sie auf die Horizontalen durch d_1, d_2, u. s. w. in der Mitte zwischen jenen durch u_1, u_2, u. s. w. fallen, ist eine Folge der Gleichheit des Flächeninhaltes von Kugelzonen gleicher Höhe.

Um den Kubikinhalt einer Kugel zu finden, bildet man die Summe einer Reihe von Elementarkegeln, deren Grundflächen die Oberfläche der Kugel ausmachen, und deren Höhe der Radius ist. Wenn daher

gleiche Theile der Oberfläche einer Kugel genommen und auf dieselben als Grundflächen Sectoren gestellt werden, die ihre Scheitelpunkte im Mittelpunkte haben, so haben diese Sectoren gleiche Kubikinhalte. Die Segmente die wir hier behandeln, sind gleiche Bruchtheile von solchen gleichen Körpern.

Man ziehe die Verticalen von der Art ba durch die Schwerpunkte a_1, a_2 u. s. w. Die an diesen Punkten wirkenden Gewichte sind gleich und können durch au_1, $u_1u_2 = w_1w_2$ u. s. w. dargestellt werden. Man gebrauche a als Pol und w_1w_8 als die Gewichtlinie, und ziehe, bei dem Punkte f_8 anfangend, das den Gewichten entsprechende Seilpolygon c.

Wir haben als Poldistanz den grössten Horizontalschub gebraucht, den ein Segment der Kuppel auf den darunter befindlichen Theil ausüben kann, wenn die gedrückten Ringe sich bis zu $51^0\ 49'$ vom Scheitel herab erstrecken.

Unterhalb des Punktes, wo die Druckspannung verschwindet, wollen wir nicht annehmen, dass der Mauerverband so stark ist, dass er der Zugspannung, die erzeugt wird, widerstehen kann. Der obere Theil der Kuppel wird dann durch die Theile der Segmente unterhalb dieses Punktes getragen durch deren vereinte Thätigkeit als einer Reihe Mauerbögen, die dicht neben einander stehen.

Nun sieht man, dass die Seilcurve c, mit diesem angenommenen Horizontalschub gezogen, innerhalb der Curve des Segmentes fällt, was bedeutet, dass die Kuppel keinen so grossen Schub, wie den angenommenen ausüben wird. Nach dem Grundsatze vom geringsten Widerstande wird kein grösserer Horizontalschub in Thätigkeit gesetzt werden, als nöthig ist, um die Kuppel aufrecht zu erhalten, wenn Stabilität möglich ist. Wenn überhaupt nur im Ganzen ein kleinerer Schub als der eben angenommene in der Kuppel erzeugt wird, so ist der Punkt, wo die Druckspannung in einem Ringe aufhört, um weniger als $51^0\ 49'$ vom Scheitel entfernt; es wirkt also dann als Bogen ein längerer Theil des Segmentes, als von früheren Schriftstellern über diesen Gegenstand*) angenommen wurde, von denen keiner, soweit mir bekannt ist, ein genaues Verfahren für die Lösung des Problems gegeben hat, obgleich die Endresultate einigermassen annähernd richtig waren.

Um Stabilität zu sichern, muss die Seilcurve in das innere Drittel desjenigen Theiles des Meridianschnittes des Segmentes, welches als

*) Siehe in einem vor der Royal Institution of Brit. Architects gelesenen Aufsatze „On the Mathematical Theory of Domes“, Febr. 6. 1871. Von Edmund Beckett Denison, L.L.D., Q.C., F.R.A.S.

Bogen wirken soll, eingeschrieben werden, wie aus denselben Gründen erhellt, die bei den Gewölben aus Mauerwerk angeführt wurden.

Und ferner wird die Ringspannung in der Höhe der Kuppel verschwinden, wo die Seilcurve, indem sie sich von dem Scheitel entfernt, zuerst sich mehr der Verticalen nähert, als die Tangente des Meridianschnittes; denn über jenem Punkte kann der grösste Schub, den die Kuppel ausüben kann, nicht so gross sein, als an dem Punkte, wo der Schub des Bogens gleich dem der Kuppel ist.

Um nun zu bestimmen, in welchem Verhältnisse die Ordinaten der Curve c verlängert werden müssen, um die der Curve e zu geben, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt, ziehen wir die Linie fo und schneiden dieselbe durch die Horizontalen m_1p_1, m_2p_2 u. s. w., wobei die Grössen mp die Aussenordinaten des inneren Drittels sind. Weiter ziehe man Verticale durch p_1, p_2 u. s. w. und schneide sie bei q_1, q_2, q_3 u. s. w. durch Horizontale durch c_1, c_2, c_3 u. s. w. Durch diese Punkte ziehe man die Curve qq, deren Ordinaten von der Art von qh sind. Eine dieser Ordinaten muss verlängert werden bis zu ihrer correspondirenden ph, und zwar so, dass keine qh dann länger werden wird, als ihre correspondirende ph. Um dies zu bewirken, ziehe man die Tangente oq_2 an die Curve qq, dann wird uns oq_2 in den Stand setzen, die verlangte Verlängerung vorzunehmen. Z. B. möge die Horizontale durch c_4 die Linie oq_2 bei j_4 treffen, dann die Verticale durch j_4 fo bei i_4 schneiden, so ist e_4 (welches auf derselben Horizontalen wie i_4 liegt) die neue Lage von c_4. Aehnlich können wir die übrigen Punkte der Curve e finden; aber es ist besser, die neue Poldistanz zu bestimmen, und diese Methode blos als Probe zu gebrauchen.

Die Curve qq, die in dieser Construction gebraucht wird um die Verhältnisslinien zu finden, welche man braucht um die Ordinaten der Curve c so zu verlängern, dass sie die Ordinaten einer Curve e werden, welche die äussere Grenze des inneren Drittels berührt, kann mit gleicher Leichtigkeit bei der Construction des Mauerbogens angewandt werden. Dieses gibt uns ein directes Verfahren anstatt des versuchsweisen, welches in Verbindung mit Fig. 14 angewandt wurde.

Um die neue Poldistanz zu finden, ziehe man fj parallel oq_2, indem man ww bei j schneidet, dann wird i, der Schnittpunkt der Horizontalen durch j, die neue Lage der Gewichtlinie vv sein, deren Poldistanz von a in dem verlangten Verhältnisse vermindert wurde.

Die Seilcurve e wird parallel zur Curve der Kuppel sein bei den Punkten, wo die neue Gewichtlinie vv die Curve st schneidet. Es sollte bemerkt werden, dass die Poldistanz, die wir jetzt bestimmt

haben, noch ein wenig zu gross ist, weil das Polygon *e* um die wahre Seilcurve umschrieben ist; und da das Polygon eine Ecke in der Begrenzungscurve *mm* hat, so ist die Seilcurve noch nicht hoch genug, um die Begrenzungscurve zu berühren. Wäre die Zahl der Theilungen ursprünglich grösser gewesen (was die Grösse unserer Figur nicht erlaubte) so hätte sich dies richtiger ergeben.

Man sieht, dass das Polygon *e* bei e_5 ein wenig ausserhalb der verlangten Grenzen fällt; dies würde theilweise berichtigt werden, wenn man die Poldistanz, wie eben angedeutet, um ein Geringes verminderte; der Punkt würde jedoch auch bei der kleineren Poldistanz ein klein wenig ausserhalb der Grenze bleiben, und um soviel ist daher die Kuppel unstabil. Eine Kuppel, deren Dicke ein Fünfzehntel des inneren Durchmessers ist, ist beinahe genau stabil.

Es ist eine bemerkenswerthe Thatsache, dass ein halbcylindrisches Gewölbe von gleichmässiger Dicke, ohne Belastung, beinahe genau dreimal so dick sein muss; die Dicke muss nämlich ungefähr ein Fünftel der Spannweite sein, damit es möglich ist, die Seilcurve in das innere Drittel einzuschreiben.

Die einzige grosse halbkugelförmige Kuppel, von der ich die Dimensionen habe, welche dick genug ist, um ohne anderweitige Hülfe, wie Reife oder Bänder vollkommen stabil zu sein, ist die Gol Goomuz zu Beejapore in Indien. Sie hat einen inneren Durchmesser von $137\frac{1}{2}$ Fuss und eine Dicke von 10 Fuss, sodass sie ein klein wenig dicker als nothwendig ist; aber sie trägt wahrscheinlich eine Last auf ihrem Scheitel, welche die grössere Dicke erfordert.

Die halbkugelförmige Kuppel mit gleichmässiger Dicke ist eine sehr fehlerhafte Art, das Baumaterial anzuordnen. Es ist blos nothwendig, die Kuppel bis zu $51^0\,49'$ von dem Scheitel so leicht und dünn zu machen, dass sie keinen so grossen Horizontalschub ausüben kann, wie die dickeren Bogen darunter, um den ganzen Vortheil von der wirklichen Stärke dieser Art von Bauwerk zu ziehen. Eine Kuppel, deren Dicke allmählig nach dem Scheitel zu abnimmt, hat einen theilweisen Vorzug; aber nichts als ein plötzlicher Wechsel der Dicke nahe diesem Punkte scheint ganz wirksam zu sein.

Die nöthige Dicke, um die Ringspannung und den Meridianschub auszuhalten, kann gefunden werden, wie früher bei der Metallkuppel gezeigt wurde.

Kuppeln sind gewöhnlich mit einer Laterne gekrönt, deren Gewicht zuerst unterhalb des Poles *a* aufgetragen werden muss, nachdem es auf dieselbe Einheit reducirt ist, in der die Zonen der Kuppel ge-

geben sind. Aehnlich muss, wenn ein Loch am Scheitel oder unter demselben sich befindet, das Gewicht des nöthigen Materials um das Loch zu füllen abgezogen werden, sodass *a* dann unter seinen gegenwärtigen Platz zu stellen ist. Die Construction muss dann gleich wie in Fig. 18 vollendet werden.

Man sieht sofort, dass die Wirkung eines Gewichtszuwachses wie durch eine Laterne am Scheitel, da er den Punkt *a* um eine gewisse Entfernung weiter hinaufbringt, die sein wird, dass die Curve *st* in allen ihren Punkten, *b* ausgenommen, von ihrer gegenwärtigen Lage nach links rückt, und besonders mit den Punkten in dem oberen Theile der Curve, sodass der Punkt, wo keine Ringspannung stattfindet, dem Scheitel viel näher als in einer metallenen Kuppel fällt. Man wird bemerken, dass die Zufügung eines sehr kleinen Gewichtes am Scheitel bewirkt, dass sich der Punkt m_2, wo keine Ringspannung stattfindet, in der Kuppel von Mauerwerk beinahe dem Scheitel nähert, sodass die Segmente dann gänzlich als steinerne Bögen wirken werden, mit Ausnahme eines sehr kleinen Theiles beim Scheitel.

Im Gegentheil wird die Entfernung eines Theiles beim Scheitel oder die Abnahme der Dicke oder irgend ein Verfahren um den oberen Theil der Kuppel leichter zu machen, den Punkt, an dem keine Ringspannung stattfindet, weiter vom Scheitel entfernen, sowohl bei der *Metall*kuppel, als auch bei der Kuppel von Mauerwerk. In einer Kuppel von Mauerwerk braucht die Dicke oberhalb des Punktes, wo keine Ringspannung stattfindet, wie er durch die Curve *st* bestimmt wurde, nur so gross zu sein, dass sie die zwei Drucke denen sie unterworfen ist, aushält, nämlich den im Ringe und den im Meridian; während unterhalb desselben die als Bögen wirkenden Segmente dick genug sein müssen, um einen Horizontalschub zu erzeugen, der gleich ist dem grössten radialen Schub der Kuppel über dem Punkte, wo keine Ringspannung stattfindet.

Aufmerksamkeit auf diesen Punkt wird die Stabilität irgend einer Kuppel von Mauerwerk, sei sie kugelförmig oder anders, ohne weitere Hilfe sichern; und obgleich ich hier keinen Beweis dieser Behauptung gebe, so habe ich doch Grund zu glauben, dass dies die Lösung des Problems ist, eine Kuppel von möglichst kleinem Gewichte zu construiren, unter der Voraussetzung, dass die Meridianfugen der Ringspannung keinen Widerstand entgegensetzen können.

Mehrere grosse Kuppeln sind aus mehr als einer Schale zusammengesetzt, um vermehrte Sicherheit zu gewähren für die grossen Laternen, die sich auf denselben befinden: die von St. Peter in Rom ist doppelt,

und die des Pantheon in Paris dreifach. Die verschiedenen Schalen sollten alle aus derselben dicken Zone unter dem Punkte mit der Ringspannung Null emporsteigen und die Segmente der dicken Zone sollten einen Horizontalschub hervorbringen, der gleich ist der Summe der radialen Schübe aller Schalen die darauf stehen.

Es ist ein gewöhnliches Verfahren, die Stabilität grosser Kuppeln zu sichern, indem man sie mit eisernen Reifen oder Ketten umgibt, oder indem man das Mauerwerk verankert; dieser Fall scheint von genügender Wichtigkeit zu sein, um unsere Aufmerksamkeit zu verlangen.

Wenn der Reif die Kuppel in $51^0\,49'$ oder in einer kleineren Entfernung vom Scheitel umgibt, so wird die Kuppel an allen Punkten über dem Reife eine wahre Kuppel sein. Nehmen wir an, der Reif sei bei $51^0\,49'$, so sollte man die Curve e unter jenem Punkte durch die Punkte f_3 und f_8 legen, woraus man sieht, dass die Kuppel dünner gemacht werden kann, als gegenwärtig, und dass der verursachte Horizontalschub kleiner sein wird. Die Spannung des Reifes würde von einem radialen Schube herrühren, welcher der Unterschied ist zwischen dem für diesen Punkt durch die Curve st gegebenen Schube und dem Horizontalschube (Poldistanz) des Polygons e, wenn es durch f_3 und f_8 geht. Dass die Curve e durch diese zuletzt erwähnten Punkte geht, ist eine Folge des Satzes vom geringsten Widerstande.

Nehmen wir dagegen an, ein anderer Reif umgebe die Kuppel bei f_5; die Curve e muss durch f_8 und f_5 gehen, und wird in diesem Theile des Segmentes einen entsprechenden Horizontalschub haben. Die Curve e muss auch durch f_5 und f_3 gehen, wird aber in diesem Theile des Segmentes einem Horizontalschub entsprechen, welcher von dem in dem Theile zwischen f_8 und f_5 verschieden ist. In der That hängt der Horizontalschub in dem Segmente einer Kuppel über irgend einem Reife ausschliesslich von jenem Segmente ab und wird nicht beeinflusst von der Zone unterhalb des Reifes. Die von dem Reife ausgehaltene Spannung rührt jedoch von der radialen Kraft her, die der Unterschied der Horizontalschübe der Zonen über und unter dem Reife ist.

Man sieht, dass die Anbringung eines zweiten Reifes die Dicke, welche nöthig ist um die Kuppel zu tragen, noch mehr verringern wird, wenn nicht in der That die Dicke nöthig ist, um die Compression im Meridian auszuhalten.

Wäre ein einziger Reif bei f_5 angebracht worden, ohne einen über jenem Punkte, so sollte die Kuppel über f_5 gerade behandelt werden, wie wenn der Anfangskreis an jenem Punkte läge. Die Curve e muss

dann von f_5 ausgehen, wie früher von f_8, und an einem Punkte zwischen f_5 und dem Scheitel die Grenzcurve berühren.

Durch die hier angewandte Methode die Spannung eines Reifes zu finden, ist es uns ermöglicht, sofort die Drucke zu untersuchen, welche in den wichtigen neueren Kuppeln entstehen, die aus metallenen Ringen und Rippen construirt sind, während die Felder mit Glasscheiben ausgefüllt sind.

Bringt man eine grosse Anzahl von Ringen in kleinen Entfernungen von einander an, so wird man sehen, dass die eben vollendete Erörterung auf die früher gegebene Methode für die Metallkuppel zurückführt.

Die Kuppel der Paulskirche in London ist eine, die vielfach ungünstig kritisirt wurde wegen der ungewöhnlichen Mittel, welche angewandt sind, um die bei einer so grossen Kuppel so hoch über den Grundmauern des Gebäudes nothwendig entstehenden Schwierigkeiten zu überwinden. Die äussere Kuppel besteht aus einem Fachwerk von Eichenholz, das auf einer kegelförmigen Backsteinkuppel ruht, welche den Kern bildet.

Auch befindet sich eine parabolische Backsteinkuppel unter dem Kegel, welche keinen wesentlichen Theil des Systems bildet. Da die kegelförmige Kuppel im Allgemeinen einige Besonderheiten besitzt, die der Beachtung werth sind, so wollen wir eine Untersuchung jener Bauform als Schluss unserer Constructionen geben.

Siebzehntes Kapitel.

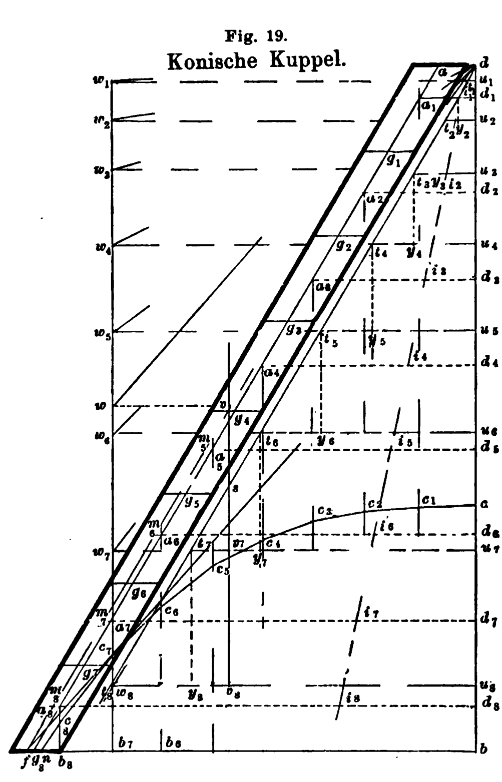
Kegelförmige Metallkuppel.

In Fig. 19 sei bd die Axe des abgestumpften Metallkegels, der von einer Verticalebene in dem Meridianschnitte a geschnitten werde. Wir nehmen an, der Kegel habe eine gleichmässige Dicke, die so klein ist, dass sie im Vergleich mit seinen andern Dimensionen vernachlässigt werden kann. Wir nehmen ferner an, dieser abgestumpfte Kegel werde durch eine Reihe gleichweit entfernter Horizontalebenen wie g_1, g_2 u. s. w. in eine Reihe von abgestumpften Kegeln oder Ringe zerlegt: dann ist das Gewicht jedes Ringes proportional zu seiner convexen Oberfläche. Die convexe Oberfläche irgend eines Ringes ist $2\pi r \times$ seiner schiefen Höhe, wenn r die halbe Summe der Radien der beiden Grundflächen, d. h. der mittlere Radius ist. Folglich sind die Gewichte dieser Ringe, oder irgend eines gegebenen Bruchtheiles derselben, der zwischen zwei Meridianebenen eingeschlossen ist, proportional zu ihren mittleren Ra-

dien. Ziehen wir diese mittleren Radien d_1a_1, d_2a_2 u. s. w. zwischen den Horizontalen durch g_1, g_2 u. s. w., und nehmen wir einen passenden Bruchtheil, etwa $\frac{1}{3}$ der Grössen von der Art *da* als Gewichte. Die Linie *ii* schneidet $\frac{1}{3}$ von jeder derselben ab; dann mache man $du_1 = d_1i_1$ als das Gewicht des Ringes ag_1, $u_1u_2 = d_2i_2$, $u_2u_3 = d_3i_3$, u. s. w. als die Gewichte der Ringe g_1g_2, g_2g_3 u. s. w.

Zieht man nun die Linie *dt* parallel *aa*, so entspricht sie der Curve *st* der Figur 18; die Grössen von der Art *tu* stellen dann den horizontalen radialen Schub dar, welchen der Kegel auf den unter ihm befindlichen Theil ausübt, während der von irgend einem Ringe auszuhaltende Schub der Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Grössen von der Art *tu* ist, d. h. der radiale Schub in dem Ringe g_7g_8 wird durch t_8y_8 dargestellt, der in g_6g_7 durch t_7y_7 u. s. w. Wenn der Gewichtsmaassstab so angenommen ist, dass du_8 einen Theil des Kegels zwischen zwei Meridianebenen darstellt, die einen Winkel von

Fig. 19.
Konische Kuppel.



$$\theta = 180^0 : \pi = 57^0.3$$

machen, werden t_8y_8; t_7y_7 u. s. w. die gesammten Ringspannungen der correspondirenden Ringe des Kegels sein, wie dies früher bei der kugelförmigen Kuppel bewiesen wurde. Es muss bemerkt werden, dass beim Kegel diese Grösse das Vorzeichen nicht ändert, und immer eine Druckspannung ist. Die Compression im Sinne eines Meridians wird unter denselben Umständen durch die Grössen dt_8, dt_7 u. s. w. ausgedrückt.

Ein solcher Kegel muss auf einen cylindrischen Unterbau oder eine andere Unterlage gestellt werden, die einen Widerstand in der Richtung *aa* ausüben kann; wenn aber diese Unterlage durch einen hori-

zontalen radialen Schub sehr leicht verrückt wird, so wird eine Ringspannung an der Grundfläche des Kegels entstehen. Da es sehr wahrscheinlich ist, dass diese Verschiebung stattfindet, so ist es viel besser, den Fuss des Kegels so stark zu machen, dass er diese Spannung aushält, die $t_8 u_8$ ist, wenn du_8 das Gewicht eines Segments von 57°.3 ist; dann wird die Unterlage nur eine verticale Kraft zu tragen haben.

Diese Erörterung ist ebensogut anwendbar auf einen Kegel, der aus einem Netzwerk von Ringen und schiefen Pfosten gebildet ist, deren Zwischenräume mit Glas oder anderem Material geschlossen sind.

Kegelförmige Kuppel aus Mauerwerk.

Wir wollen nun annehmen, die gesammte horizontale Dicke der zu behandelnden Kuppel sei ein Sechzehntel des inneren Durchmessers der Grundfläche, oder ein Achtel des inneren Radius, wie in Fig. 19 gezeichnet ist. Die wirkliche Dicke ist kleiner; da jedoch die Dicke horizontal gemessen eine passende Zahl ist, so wollen wir sie kurz „Dicke“ nennen, wenn nichts anderes bestimmt wird.

Man lege gleich entfernte Ebenen, wie vorher angegeben: dann können die Inhalte dieser Ringe mittelst der Formel für das Prismatoid gefunden werden und zwar wird der Inhalt

$$= \tfrac{1}{6}\pi h[r_1^2 - r_1'^2 + 4(r^2 - r'^2) + r_2^2 - r_2'^2],$$

worin h die Höhe des Ringes ist, r_1 und r_1' die äusseren und inneren Radien der einen, r_2 und r_2' die der anderen Grundfläche sind, und r und r' die des mittleren Schnittes. Nun ist

$$r_1 - r_1' = r - r' = r_2 - r_2' = t$$

der Dicke des Kegels; und $r_1 + r_2 = 2r$, $r_1' + r_2' = 2r'$, folglich

$$\text{Inhalt} = \pi ht(r + r') = 2\pi ht\bar{r},$$

wenn $\tfrac{1}{2}(r + r') = \bar{r}$, dem mittleren Radius des mittleren Schnittes ist. Hieraus sieht man, dass die Gewichte in derselben Weise variiren und durch dieselben Grössen dargestellt werden, wie früher bei einem dünnen Kegel angegeben. Wir nehmen an, dass die Schwerpunkte irgend welcher dünner Segmente, die aus diesen Ringen durch Meridianebenen ausgeschnitten werden, welche einen kleinen Winkel mit einander bilden, in den mittleren Punkten a_8, a_7 u. s. w. liegen; diese Annahme ist genau genug für den nahe der Grundfläche gelegenen Theil des Kegels, den wir jetzt besonders zu untersuchen haben.

Mittelst der Gewichte $w_8 w_7 = u_8 u_7$ u. s. w. beschreibe man mit einer angenommenen Entfernung vom Pole d das Seilpolygon c, bei n dem inneren Drittel der Grundlinie anfangend.

Steht nun der Kegel auf einer Trommel, die von selbst einen genügenden radialen Schub ausübt, um die Meridianfugen des Kegels an der Grundfläche geschlossen zu halten, so wird sich alles genau so wie vorher in Betreff der metallenen Kuppel verhalten; erzeugt jedoch die Trommel einen kleineren radialen Schub, so werden sich die Längsfugen nahe der Grundfläche öffnen, und die Bedingungen der Stabilität jenes Theiles werden untersucht werden müssen, wie es bei der halbkugelförmigen Kuppel aus Mauerwerk geschah, indem man den oberen Theil der Kuppel als von einer Reihe von steinernen Bögen getragen betrachtet. Von f aus ziehe man die Tangente fc_7 an die Curve c; dann muss $c_7 b_7$ nach $m_7 b_7$ verlängert werden, und die Ordinaten von c in demselben Verhältnisse, damit das Seilpolygon die äussere Grenze fm berührt; fm und fc_7 sind die Verhältnisslinien, womit die Verlängerung vorzunehmen ist. Um zu finden um wieviel der Schub verkleinert wird, ziehe man durch den Durchschnittspunkt von fm und bd eine Parallele zu fc_7, welche die Gewichtlinie bei w schneidet; dann gibt uns v, der Punkt, wo die Horizontale durch w fm schneidet, die neue Lage der Gewichtlinie und deren Distanz von dem Pole d. Diese Verticale schneidet tt etwa halbwegs zwischen t_6 und t_7, und zeigt so, dass die Meridianfugen des Kegels von der Grundfläche bis zu dem Punkte g_6 ungefähr offen sein werden. Es ist unnöthig, das Seilpolygon in seiner neuen Lage zu ziehen.

Wir erhalten so den kleinsten Horizontalschub, den die Kuppel erfordert, um zu stehen. Der wirkliche Schub, den die Trommel ausübt, kann irgend einen grösseren Werth haben, als dieser geringste Schub.

Man sieht, dass eine Verminderung der Dicke des Kegels bewirkt, dass der Berührungspunkt c_7 und der Punkt, wo keine Zusammendrückung stattfindet, näher an die Grundlinie verlegt werden. In anderen Worten: die dünne Kuppel von Mauerwerk von gegebenem Oeffnungswinkel erzeugt nothwendigerweise einen grösseren Schub im Verhältnisse zu ihrem Gewicht, als eine dicke Kuppel, obgleich jenes Verhältniss unverändert bleibt, wenn die Fugen bis zu der Grundlinie geschlossen bleiben sollen.

Alle Umstände, die sich auf radialen Schub über dem Punkte wo keine Ringspannung stattfindet und auf die Meridianspannung beziehen, sind dieselben wie bei dem Metallkegel.

Irgend eine weitere Belastung über das Gewicht des Kegels selbst hinaus, wie z. B. das einer Laterne oder äusseren Kuppel, wie in dem Falle der Kuppel der Paulskirche, kann als weitere Höhe oder Dicke

gewisser Ringe des Kegels eingeführt und behandelt werden. Dieselbe Methode, die hier angewandt wurde, kann bei allen solchen Fällen angewendet werden, wenn die Gewichte durch irgend ein passendes Verfahren bestimmt sind. Es kann z. B. mit Hülfe der Formel zur Berechnung des Kubikinhaltes eines Prismatoids gezeigt werden, dass die Inhalte der Ringe, die von einem sich gleichförmig zuspitzenden Kegel durch gleichweit entfernte Horizontalebenen abgeschnitten werden, sich verhalten wie die Producte aus dem mittleren Radius des Mittelschnittes in die Dicke beim Mittelschnitte.

Andere gewölbte Bauten.

Den oben entwickelten ähnliche Grundsätze sind anwendbar auf Kuppeln mit elliptischer oder vieleckiger Grundfläche, auf Kuppeln, deren Meridianschnitte gothische Spitzbogen sind, auf schiefe Gewölbe, auf Kreuzgewölbe, die durch die Zusammensetzung von Tonnengewölben gebildet wurden, sowie auf kuppelförmige Kreuzgewölbe.

Durch Anwendung der entwickelten Grundsätze wird es leicht, den Kegel oder die Kuppel zu behandeln, die den Druck von Wasser oder Erde auszuhalten hat. In der That ist es nicht zu viel, wenn man sagt, dass die vollständige Lösung des Problems über die Stabilität der Gewölbe jetzt zum ersten Mal dargelegt worden ist, und dass die gehörige Beziehung und Verwandtschaft zwischen ähnlichen Bauten in Metall oder Mauerwerk jetzt klar ersichtlich ist. Im Besonderen haben die Erörterungen die Anwendbarkeit eines besonderen Seilpolygons gezeigt unter der unendlichen Zahl derjenigen, die von einer gegebenen Reihe von Gewichten herrühren, und welche sämmtlich Projectionen irgend eines derselben sind; und die Möglichkeit, in jeder der behandelten Constructionen aus ihm eine vollständige und hinreichend genaue Lösung herleiten zu können.

Nachtrag A.

Wegen der Wichtigkeit des Satzes IV, welchen wir den Satz vom Zusammenfallen der Schlusslinien genannt haben, geben wir hier eine zweite mehr ins Einzelne gehende Darstellung desselben, die wir einem Artikel desselben Verfassers, betitelt „The Arch Rib“ im American Journal of Mathematics für 1878, Vol. I, p. 249 entnehmen.

Es ist augenscheinlich, dass das Biegungsmoment an irgend einem Punkte eines elastischen Bogens die algebraische Summe der Momente

der Kräftepaare ist, welche bei dem Bogen auf der einen oder der anderen Seite des angenommenen Punktes angebracht sind.

Betrachten wir zuerst das Biegungsmoment an irgend einem Punkte des Bogens, welches blos von einem einfachen Schube herrührt. Ein einfacher Schub wird bei einem Bogen hervorgebracht durch einen Temperaturwechsel oder irgend eine andere Ursache, wodurch bewirkt wird, dass seine natürliche Spannweite verschieden wird von der wirklichen Entfernung zwischen seinen Unterstützungspunkten; aber die von einem gegebenen Schube herrührenden Biegungsmomente sind identisch, was auch immer jenen Schub hervorbringen mag: ob er eine abgeleitete Wirkung ist, die von der Biegung herrührt, welche die Belastung hervorbringt, oder ob er durch einen Wechsel der Temperatur oder Lage der Bogenenden hervorgebracht wird, welche bewirkt, dass die natürliche Spannweite des Bogens von der wirklichen Entfernung zwischen seinen Unterstützungspunkten verschieden wird. Das Wort Schub ist gebraucht, um die Wirkungen der Zusammenziehung sowohl als der Dehnung im Bogen mit einzuschliessen; der Schub ist in dem ersteren Falle negativ.

Sind die Richtungen der Tangenten des Bogens an den Unterstützungspunkten nicht fest, so verschwindet das Biegungsmoment bei diesen Punkten und der Schub wirkt längs ihrer Verbindungslinie, die nicht nothwendig horizontal sein muss. Das Biegungsmoment an irgend einem Punkte des Bogens, welches von diesem Schube herrührt, ist das Product des Schubes mit seinem Hebelarme, welcher die senkrechte Entfernung von dem angenommenen Punkte bis zu der Wirkungslinie des Schubes ist. Dies Product ist augenscheinlich gleich dem Producte der horizontalen Componente des Schubes mit der verticalen Entfernung von dem angenommenen Punkte bis zu der Linie der Schübe, was aus einer sehr einfachen Betrachtung ähnlicher Dreiecke ersichtlich ist.

Daher sieht man, dass wir in diesem Falle zu der folgenden wichtigen Wahrheit gelangt sind:

Die neutrale Axe eines elastischen Bogens ist die Seilcurve der Biegungsmomente, welche von dem Schube zwischen seinen Unterstützungspunkten herrühren.

Dieser Satz ist nicht blos auf einen Bogen, der Gelenke an seinen Unterstützungspunkten hat, anwendbar, sondern auch auf den elastischen Bogen im Allgemeinen, wie wir jetzt zeigen wollen.

Jeder von dem bereits betrachteten verschiedene Fall kann die Folge der Einwirkung eines Kräftepaares an einem oder beiden Unterstützungspunkten sein, wodurch dann ein Biegungsmoment an dem einen dieser Punkte oder an beiden hervorgerufen wird. Die Wirkung eines

solchen Paares hängt nicht von der Art seines Ursprunges ab; sein Auftreten kann durch äussere Ursachen, oder auch, wie gewöhnlich der Fall ist, durch den Schub veranlasst werden. Das Biegungsmoment, welches durch ein Kräftepaar veranlasst wird, das aus äusseren Ursachen an einem der Unterstützungspunkte einwirkt, ist so beschaffen, dass es von seinem Angriffspunkte an bis zum anderen Unterstützungspunkte hin gleichförmig abnimmt. Seine Wirkung ist somit die, dass es die Schublinie von dem Punkte an, wo das Kräftepaar einwirkt, in eine neue Lage bringt, sodass die verticale Entfernung zwischen dem Unterstützungspunkte, an dem das Kräftepaar einwirkt, und der neuen Schublinie multiplicirt mit dem Schube des Bogens gleich dem Momente des Kräftepaares ist. Das andere Ende der Schublinie wird durch die Einwirkung des Kräftepaares nicht verschoben. Wenn noch ein zweites Kräftepaar am zweiten Unterstützungspunkte einwirkt, so wird die Schublinie von diesem Unterstützungspunkte in ähnlicher Weise abgebeugt, während das andere Ende unbeweglich bleibt.

Nun aber trifft dieselbe Schlussfolgerung zu, wie wir sie vorher anwandten, um das Biegungsmoment an irgend einem Punkte des Bogens zu finden; sie lässt sich ausführlicher so ausdrücken:

Das Biegungsmoment an irgend einem Punkte des elastischen Bogens, das durch horizontalen oder schiefen Schub verursacht wird, ist das Product der horizontalen Componente des Schubes mit der verticalen Ordinate zwischen dem auf der neutralen Axe des Bogens angenommenen Punkte und der Schublinie in ihrer wahren Lage.

Nachdem wir den Schub und dessen Seilcurve oder Momentencurve, welche die neutrale Axe des Bogens selbst ist, betrachtet haben, wollen wir auch die Belastung und ihre Momentencurve betrachten.

Das von den Gewichten herrührende Biegungsmoment an einem angenommenen Punkte des Bogens ist die algebraische Summe der Producte, die man erhält, wenn man jedes Gewicht mit seiner Entfernung von dem angenommenen Punkte multiplicirt. Wenn der Bogen Gelenke an seinen Unterstützungspunkten hat, so kann die Belastung an diesen Punkten keine Biegungsmomente hervorrufen; aber wenn der Bogen auf irgend eine andere Weise getragen wird, so ist es offenbar, dass die der Belastung zukommenden Momente von Kräftepaaren begleitet sind, die ihren Angriffspunkt an den Unterstützungspunkten haben, gerade als ob die Biegungsmomente vom Schube herrührten, und dass die Grösse dieser Kräftepaare nach denselben Betrachtungen hinsichtlich der Verbiegung u. s. w. bestimmt werden muss, wie sie

jene bestimmten. Ja, jede besondere Kraft, die auf den Bogen einwirkt, sei es Schub, Gewicht oder irgend eine andere Kraft, ruft durch den ganzen Bogen hin Biegungsmomente hervor, welche sich besonders behandeln lassen, und jede muss offenbar in derselben Weise behandelt werden. Der Bequemlichkeit wegen haben wir alle Gewichte in eine Gruppe zusammengenommen. Wir sind also auf eine zweite wichtige Wahrheit gekommen:

In jedem elastischen Bogen muss die Schlusslinie der den Gewichten allein zukommenden Momentencurve aus denselben Bedingungen gefunden werden und dieselben Beziehungen zu dieser Momentencurve haben, wie sie die Schublinie zu der gekrümmten neutralen Axe des Bogens hat.

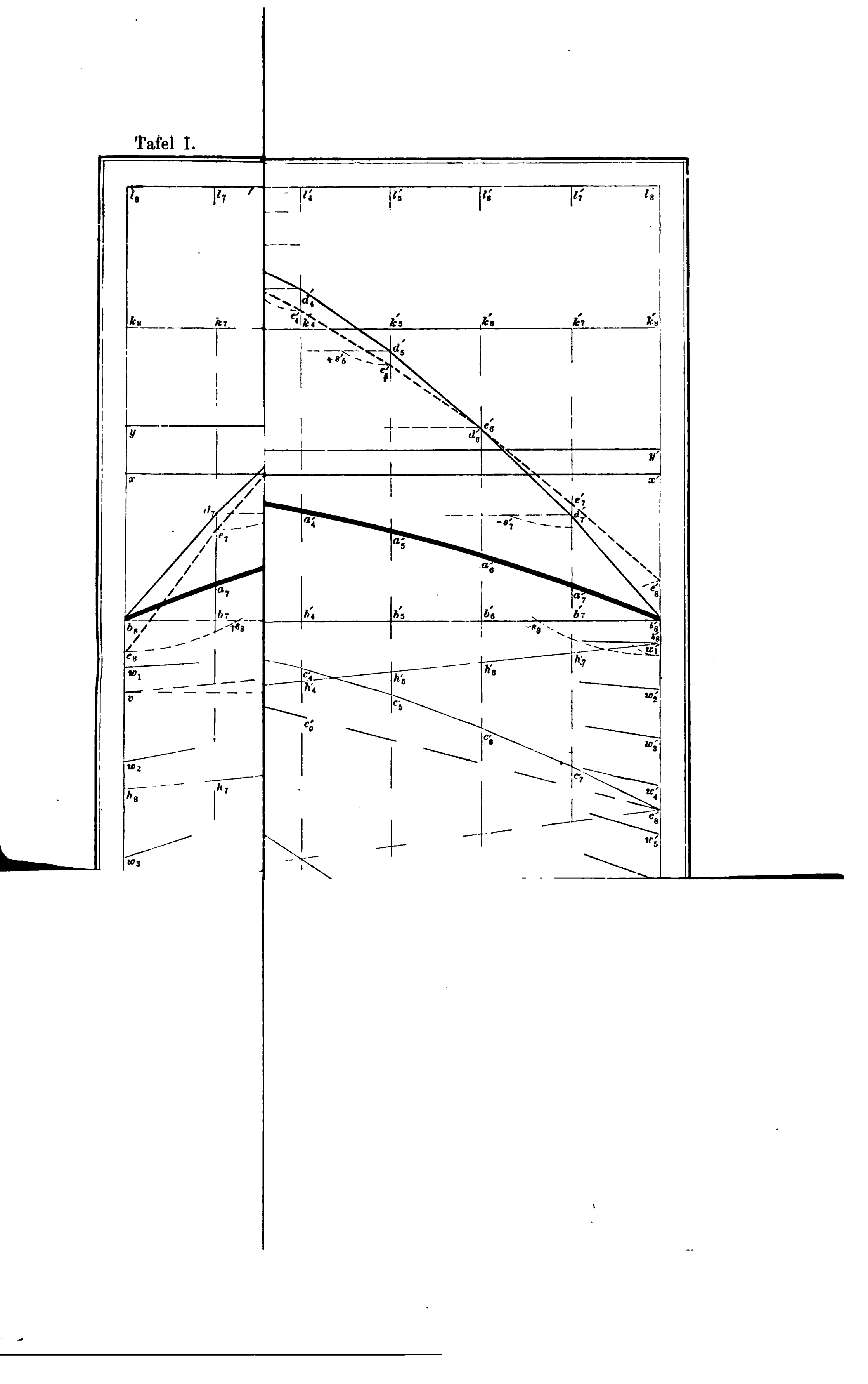
Es ist zu bemerken, dass der durch die Belastung eines Bogens verursachte Schub Biegungsmomente hervorruft mit Vorzeichen, welche denjenigen der durch die Belastung selbst hervorgerufenen Biegungsmomente entgegengesetzt sind, und dass also die Biegungsmomente, welche wirklich auf den Bogen wirken, die Differenzen zwischen den von der Belastung und den von dem Schube herrührenden Biegungsmomenten sind. Hieraus erhellt die Wahrheit des folgenden Satzes, welcher die besonderen Wirkungen des Schubes und der Belastung zusammenfasst:

Wenn diejenige von der Belastung herrührende Momentencurve, welche den wirklich im Bogen thätigen Schub zum Horizontalschube hat, so über die Curve des Bogens selbst gelegt wird, dass ihre Schlusslinie mit der Schublinie des Bogens zusammenfällt, dann ist das Biegungsmoment an irgend einem Punkte des Bogens gleich dem Producte des Horizontalschubes mit der verticalen Ordinate zwischen dem angenommenen Punkte und der Momentencurve, welche der Belastung zukommt.

Die neutrale Axe des Bogens kann daher als eine gekrümmte Schlusslinie der Momentencurve betrachtet werden.

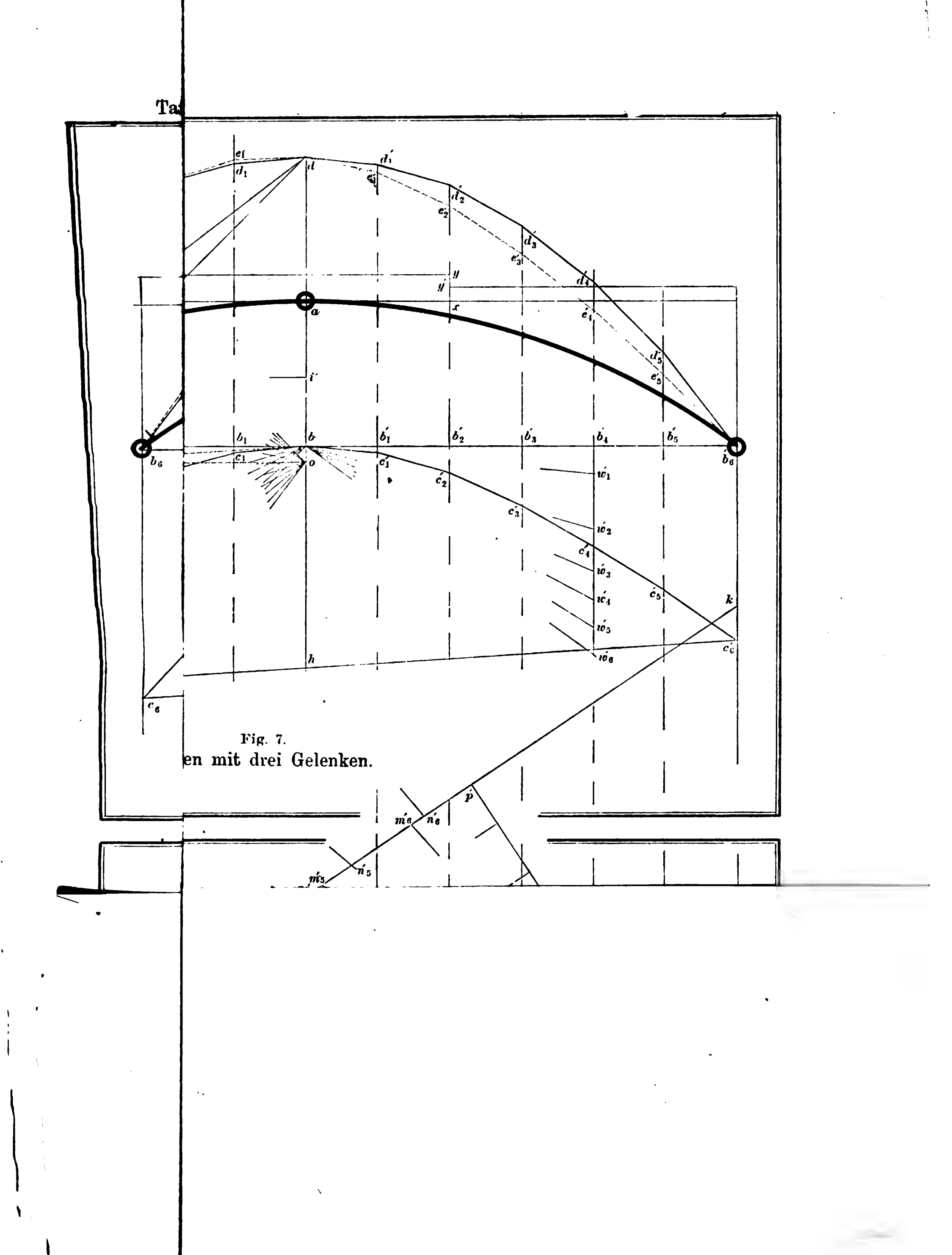
Dieselben Grundsätze lassen sich auf den elastischen Bogen unter der Einwirkung nicht-verticaler Kräfte anwenden.

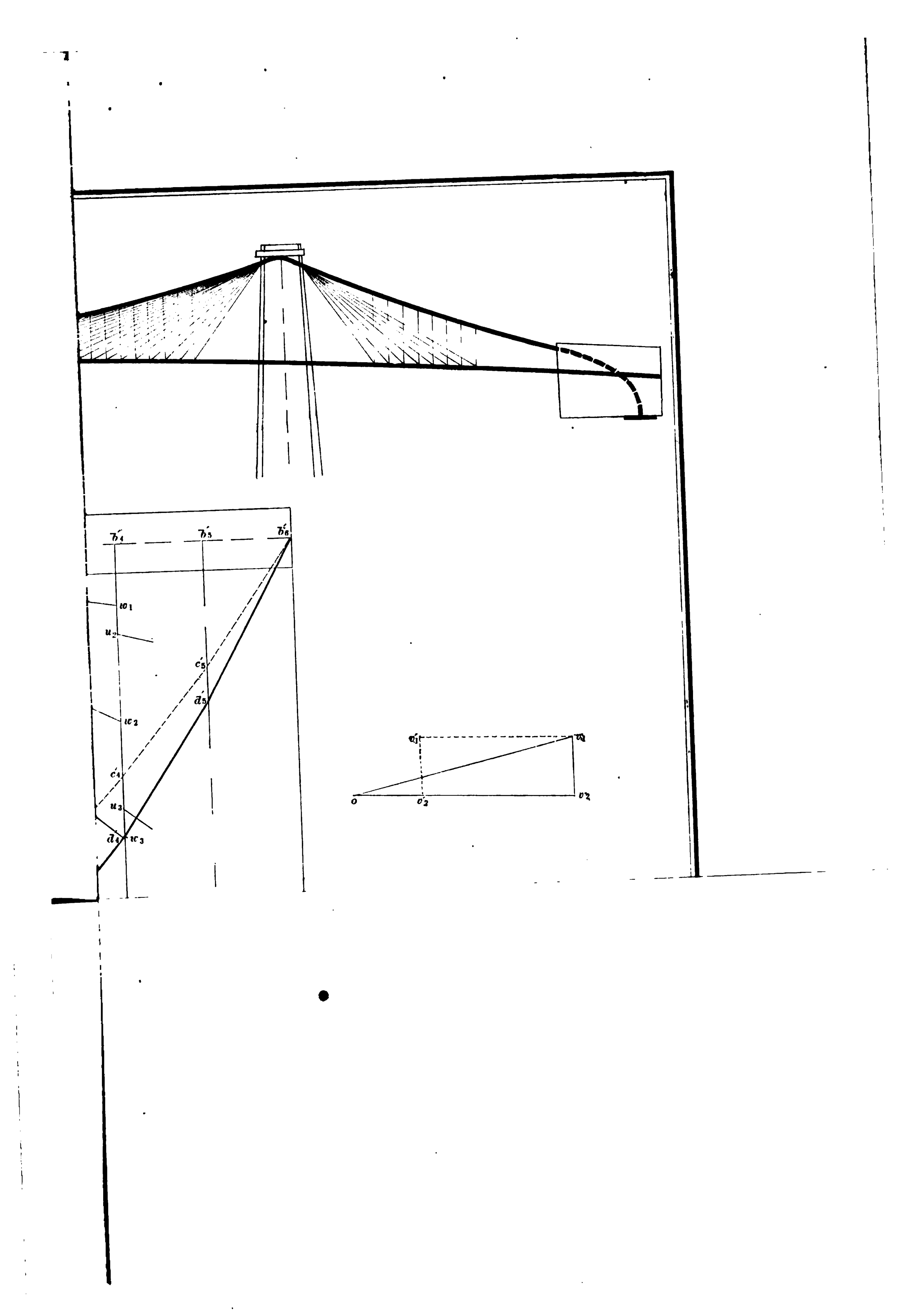
Tafel I.



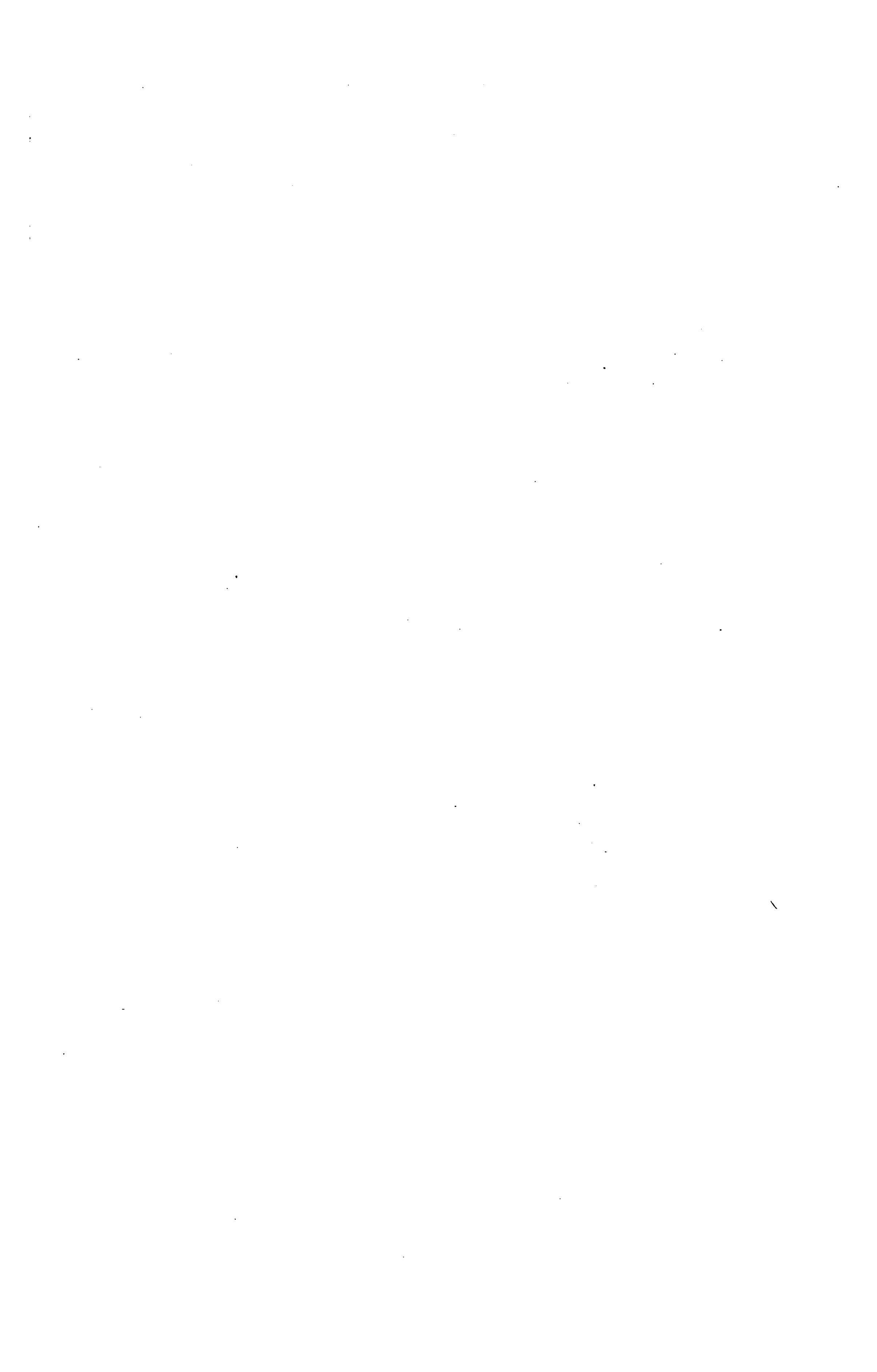
l8
l7
l'4
l'5
l'6
l'7
l'8
d'4
e'4
k8
k7
k'4
k'5
k'6
k'7
k'8
d'5
e'5
e'6
d'6
y
y'
x
x'
d7
e7
a'4
a'5
a'6
e'7
d'7
a7
a'7
e'8
b8
b7
b'4
b'5
b'6
b'7
b'8
e8
w1
w'1
h'7
c'4
h'4
h'5
h'6
v
w'2
c'5
c'6
c'7
w'3
w2
h8
h7
w'4
c'8
w'5
w3

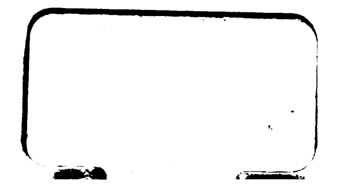
Tafel II.

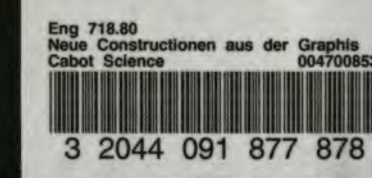

Ta
Fig. 7.
en mit drei Gelenken.



b'4
b'5
b'6
w1
u2
c'5
d'5
w2
c'4
u3
d'4
w3
v'1
v1
o
v2




Eng 718.80
Neue Constructionen aus der Graphis
Cabot Science
00470085
3 2044 091 877 878